FACULTAD DE INGENIERIA
MONTEVIDEO

PUBLICACIÓN N.° 5 (1942)
DEL INSTITUTO DE ELECTROTÉCNICA

Serie: Textos y complementos
Grupo: Medidas eléctricas

●

Galvanómetro de resonancia

POR

S. GERSZONOWICZ

●

MONTEVIDEO
R. O. DEL URUGUAY
JULIO, 1942

Publicaciones del Instituto de Electrotécnica

Trabajos aparecidos en 1938 y 1939: un folleto de 95 págs., 23 x 27 cm.

SUMARIO:

S. Gerszonowicz — Historia de la enseñanza de la electrotécnica en la Facultad de Ingeniería de Montevideo.
Lista de los trabajos relativos a electrotécnica, publicados en el Uruguay hasta 1939 incluído.
A. Cisa — Sobre calentamiento de dinamos.
D. Maggiolo Campos — Influencia del "écrouissage" por tracción sobre la permeabilidad de un acero dulce.
S. Gerszonowicz — Los nuevos Laboratorios del Instituto de Electrotécnica.
S. Gerszonowicz — Nota sobre la elección de la cuarta unidad fundamental en electrotécnica.
J. S. Young — Influencia de las condiciones de funcionamiento sobre las características de las lámparas de incandescencia.
S. Gerszonowicz — Sobre la determinación directa y semidirecta de la resistencia crítica de los galvanómetros.
S. Gerszonowicz — Estudio del retorno al cero de los galvanómetros.
D. Maggiolo de Gerszonowicz y S. Gerszonowicz. — Expresión analítica aproximada de la curva Sq (R) del balístico y su aplicación a algunas medidas rápidas.
S. Gerszonowicz — Sobre la cuarta unidad.
Colaboración de **E. Brylinski** — Sobre los sistemas de unidades de medida.

Publicaciones, serie textos y complementos.

1940:

N.° 1 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetros: definición, propiedades generales, estudio del movimiento. Un folleto de 56 págs. 16 x 23 cm.
N.° 2 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetros de imán y cuadro móvil para corriente continua. Un folleto de 88 págs. 16 x 23 cm.

1941:

N.° 3 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetro balístico. Fluxímetro. Un folleto de 56 págs. 16 x 23 cm.
N.° 4 — **S. Gerszonowicz** — Determinación experimental de las constantes y características del galvanómetro de cuadro móvil. Un folleto de 40 págs. 16 x 23 cm.

1942:

N.° 5 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetro de resonancia. Un folleto de 46 págs. 16 x 23 cm.

Por todo lo relacionado con estas publicaciones dirigirse al Director del Instituto de Electrotécnica, Facultad de Ingeniería, calle Cerrito 73, Montevideo, R. O. del Uruguay.

Publicaciones del "Instituto de Electrotécnica"

Montevideo, 1942

Galvanómetro de resonancia.

POR

Prof. S. GERSZONOWICZ

1. Generalidades. — Ya indicamos en la publicación N.° 1, 16, el principio del galvanómetro de resonancia: un galvanómetro (por ejemplo de cuadro o de imán móvil) puede vibrar con una amplitud notable a la frecuencia de la corriente sinusoidal que lo atraviesa, si se realizan ciertas condiciones, que en determinados casos consisten en la igualdad de esta frecuencia con la ideal del aparato. El spot se mueve con un movimiento sinusoidal de frecuencia generalmente lo bastante elevada como para que el ojo no pueda seguirlo; se observa pues un ensanchamiento del spot, siendo el ancho de la banda el doble de la amplitud del movimiento.

Este aparato recibió en numerosos textos el nombre de "galvanómetro de vibración"; pero de acuerdo con el vocabulario electrotécnico internacional (1938), ese nombre se reserva para los galvanómetros de cuerda, que estudiaremos en otro lugar. El mismo vocabulario define el galvanómetro de resonancia como "galvanómetro en el cual se regula el período de oscilación propia del órgano móvil, de manera que dicho período sea igual al de la corriente que se trata de medir o revelar". Veremos en los parágrafos 2 y 4 que tal regulación no es siempre la más conveniente y creemos que hubiera sido mejor adoptar la siguiente definición: "el galvanómetro de resonancia es un galvanómetro cuyo período de oscilación ideal se puede regular con el fin de realizar el mayor ensanchamiento del spot para cierta corriente o d.d.p. alterna que se quiere medir o revelar".

El galvanómetro de resonancia es preferible al teléfono como aparato de cero en corriente alterna de baja frecuencia, inferior

por ejemplo a 200 Hz; por el contrario, en el estado actual de la construcción el teléfono es más sensible en las frecuencias acústicas superiores, por ejemplo de 1000 Hz en adelante. En las frecuencias entre 200 y 1000 Hz, o mayores, puede ser preferible el galvanómetro de resonancia, porque es más cómodo y más preciso observar el ensanchamiento de un spot que la modificación de la intensidad de un sonido; además no se requiere silencio en la sala de medidas. Otra ventaja del galvanómetro de resonancia sobre el teléfono consiste en su insensibilidad a las armónicas; puede utilizarse para hacer medidas con onda no sinusoidal, mientras que con el teléfono, cuyo período ideal generalmente no se regula, las armónicas pueden hacer la medida imposible si se trabaja con una frecuencia fundamental suficientemente inferior a la de resonancia.

Las aplicaciones del galvanómetro de resonancia no se limitan a su empleo como aparato de cero, aunque esa es su finalidad principal. Puede servir para medir una pequeña corriente o d.d.p. alterna; el ensanchamiento del spot es proporcional a la corriente y no al cuadrado de la corriente, lo que es una ventaja en lo que se refiere a la sensibilidad del aparato, pero hay que recordar que lo que se mide en la resonancia es, prácticamente, el valor máximo de la onda fundamental de la corriente, y no el valor eficaz de la corriente total.

El funcionamiento de un galvanómetro de resonancia en un circuito recorrido por corriente sinusoidal de amplitud y frecuencia constantes es esencialmente diferente del de un galvanómetro de cuadro o imán móvil en un circuito de corriente continua de intensidad constante: en este último caso el galvanómetro acusa cierta desviación y sólo interviene por su resistencia en lo que se refiere a la distribución de las corrientes en el circuito, mientras que en el primer caso, además de la impedancia en reposo del galvanómetro, es necesario tener en cuenta la f. e. m. $-g\frac{d\Theta}{dt}$ debida al movimiento permanente del cuadro. El galvanómetro de resonancia es en realidad un motor síncrono.

El estudio fundamental es el del funcionamiento del galvanómetro de resonancia en un circuito donde obra una f.e.m. o una d.d.p. sinusoidal de amplitud y frecuencia constantes, pero cuando la impedancia del circuito del galvanómetro es grande, es decir, cuando se puede aplicar una d. d. p. suficiente como para poder

despreciar frente a ella la f.e.m. $-g\frac{d\Theta}{dt}$, el funcionamiento a d.d.p. constante se reduce prácticamente al funcionamiento a corriente de amplitud constante. Aunque este último funcionamiento es sólo un caso límite, posee una importancia práctica considerable; su estudio es particularmente simple y lo haremos en primer lugar.

2. Funcionamiento del galvanómetro de resonancia con corriente de amplitud constante. Sensibilidad en intensidad en corriente sinusoidal. — La ecuación de movimiento se escribe

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2}+A_o\frac{d\Theta}{dt}+C\,\Theta=gi \qquad (1)$$

donde $i=I_m\,sen\,w\,t$.

La solución de (1) ya ha sido dada en la publicación N.° 1, 16. Se tiene

$$\Theta=\Theta_m\,sen\,(wt-\psi) \qquad (2)$$

donde

$$\Theta_m=\frac{g\,I_m}{\sqrt{(C-K\,w^2)^2+A_o{}^2\,w^2}} \qquad (3)$$

y

$$tg\,\psi=\frac{A_o\,w}{C-K\,w^2} \qquad (4)$$

Designemos por

$$S_{i\alpha}=\frac{\Theta_m}{I_m} \qquad (5)$$

la sensibilidad en intensidad del galvanómetro de resonancia en corriente sinusoidal.

Se puede hacer variar $S_{i\alpha}$ obrando sobre

1) la pulsación de la corriente w

2) la pulsación propia ideal, modificando:

  a) el par director C

  b) el momento de inercia K

3) el par motor unitario g.

Examinaremos estos diferentes casos [1].

---

(1) Como ya recomendamos en la publicación N.° 1, **3**, será ventajoso para el lector comparar el estudio que sigue con el de la resonancia en un circuito eléctrico que comprenda en serie resistencia, self y capacidad. Véase especialmente el capítulo "Resonancia" de las "Leçons d'electrotechnique générale" de P. Janet, o "Oscilaciones eléctricas" de M. Simonoff, capítulo IV, 5.

1. *Acción sobre la pulsación de la fuente exterior, w, permaneciendo g, C y K constantes.*

A partir de las relaciones (3) y (5) se obtiene

$$S_{ia} = \frac{g}{\sqrt{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2}} = \frac{S_i}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4 \alpha_o{}^2 x^2}} \quad (6)$$

observando que

$$\frac{g}{C} = S_i \quad (7)$$

y haciendo

$$x = \frac{w}{w_o} \quad (8)$$

Nos bastará estudiar la función

$$y = \frac{S_{ia}}{S_i} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4 \alpha_o{}^2 x^2}} \quad (9)$$

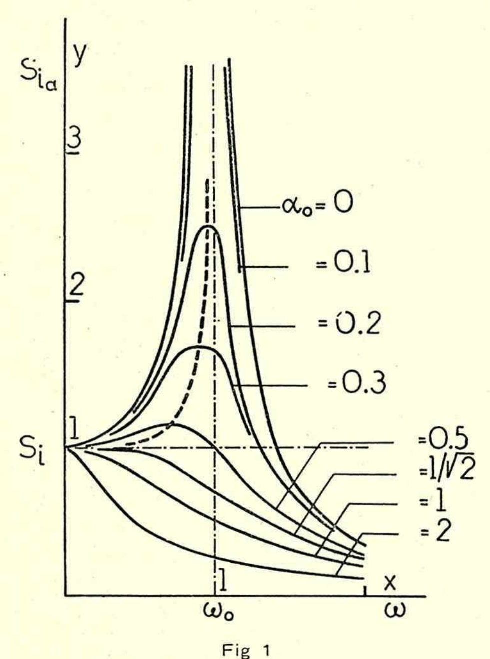


Fig 1

Las curvas de la fig. 1 representan $y(x)$, o $S_{ia}(w)$, con α_o como parámetro. Siendo α_o constante, el máximo ocurre para

$$x = \sqrt{1 - 2 \alpha_o{}^2} \quad (10)$$

es decir, cuando

$$w = w_r = w_o \sqrt{1 - 2\alpha_o{}^2} \quad (11)$$

Se ve que las curvas sólo tendrán máximo si

$$\alpha_o \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

Cuando $\alpha_o = \frac{1}{\sqrt{2}}$ el máximo tiene lugar en corriente continua ($x = 0$). La pulsación w_r correspondiente al máximo sólo se confundiría con la ideal del sistema móvil si el amortiguamiento fuese nulo; en realidad es tanto menor cuanto mayor es α_o. Observemos que w_r es inferior, no solamente a la pulsación ideal w_o, sino también a la real del sistema móvil en movimiento libre, que es $b'' = w_o \sqrt{1 - \alpha_o{}^2}$.

El valor del máximo de y se obtiene haciendo $x = \sqrt{1 - 2\alpha_o^2}$ en (9):

$$y_{max} = \frac{1}{2\alpha_o \sqrt{1-\alpha_o^2}} \quad (13)$$

y

$$S_{i\,a\,max} = \frac{S_i}{2\alpha_o \sqrt{1-\alpha_o^2}} \quad (14)$$

Los máximos relativos a los diferentes valores de α_o están situados sobre la curva

$$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \quad (15)$$

obtenida eliminando α_o entre (10) y (13) y representada en trazo punteado sobre la fig. 1.

Se ve que el máximo es tanto más pronunciado, dicho de otro modo, la resonancia es tanto más aguda, cuanto menor es α_o. Cuando se busca una gran sensibilidad máxima en corriente sinusoidal, α_o debe ser muy pequeño: es éste precisamente el caso de los galvanómetros de resonancia, en los que generalmente α_o está comprendido entre 0,001 y 0,01; se puede entonces admitir que $w_r = w_o$, de donde

$$y_{max} = \frac{1}{2\alpha_o} \quad (13a)$$

y

$$S_{i\,a\,max} = \frac{S_i}{2\alpha_o} = \frac{g}{A_o w_o} \quad (14a)$$

Debido a que la resonancia es muy aguda, el valor de y para x muy diferente de 1 (o sea la sensibilidad a las armónicas) será relativamente muy pequeño: el aparato es *selectivo*. Puede haber interés en hacer el mismo aparato *fiel*, es decir, aproximadamente con la misma sensibilidad para todas las armónicas; bastará elegir el amortiguamiento en consecuencia: una simple inspección de la fig. 1 muestra que haciendo α_o igual o ligeramente diferente de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y manteniendo la frecuencia de todas las ondas suficientemente inferior a w_o ($x \ll 1$), se obtiene el resultado deseado, realizando así un oscilógrafo. Precisaremos en otro lugar estas condiciones; las hemos mencionado aquí sola-

mente para subrayar la identidad de base de dos aparatos destinados a desempeñar servicios tan completamente diferentes como un galvanómetro de resonancia y un oscilógrafo: todo consiste en la elección de las constantes del movimiento.

Nos queda por examinar la fase de Θ con respecto a I. Volvamos a la relación (4)

$$tg\,\psi = \frac{A_o\,w}{C - K\,w^2} = \frac{2\,\alpha_o\,x}{1 - x^2}$$

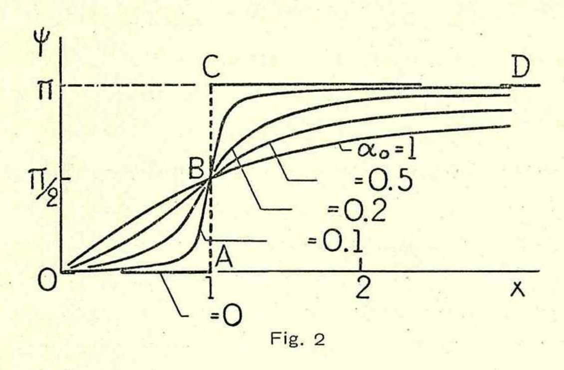


Fig. 2

En el caso ideal de $\alpha_o = 0$, $\psi(x)$ estaría representada por el segmento OA, el punto B y la semirecta CD, es decir, $\psi = 0$ para $x < 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y $\psi = \pi$ para $x > 1$, produciéndose el llamado "salto de fase", al pasar por $x = 1$ (fig. 2).

Para $\alpha_o \neq 0$, las curvas parten todas de $\psi = 0$, $x = 0$, pasan por $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y admiten $\psi = \pi$ como asíntota.

En particular, para muy pequeños valores de α_o, ψ es sensiblemente igual a cero apenas x es algo inferior a 1, y a π apenas x es algo superior a 1. El "salto de fase" es tanto más neto cuanto menor es α_o, propiedad que, como veremos, es también válida cuando la regulación se efectúa por acción sobre w_o; se ha tratado de aprovechar esta circunstancia para la regulación muy exacta de la condición $w = w_o$ (*Wenner; Kennelly, Hunter y Prior.*)

2. *Acción sobre la pulsación propia ideal* w_o.

La acción puede hacerse de dos maneras: sobre el par director C, que es la regulación más frecuente y permite una variación continua, y sobre el momento de inercia K.

a) *Acción sobre C, permaneciendo g, w, y K constantes.*

A partir de las ecuaciones (3) y (5) se obtiene

$$S_{ia} = \frac{g}{\sqrt{(C - K\,w^2)^2 + A_o{}^2\,w^2}} = \frac{g}{K w^2}\,\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a^2}} \qquad (16)$$

haciendo esta vez

$$x = \frac{w_o}{w} \tag{17}$$

y

$$a = \frac{A_o}{Kw} = 2\,\alpha_o\,x$$

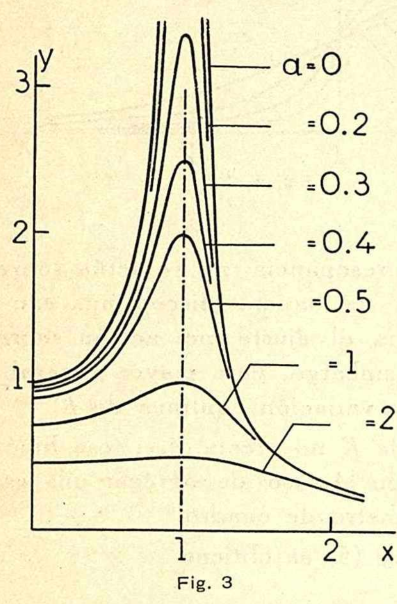


Fig. 3

Suponemos A_o independiente de C, pero debemos observar que esta hipótesis puede ser inadmisible cuando la regulación se hace obrando sobre la longitud de los hilos de suspensión, si dicha longitud llega a ser inferior a cierto valor (ver los parágrafos 7 y 25).

Las curvas

$$y = \frac{S_{ia}}{\frac{g}{K\,w^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a^2}} \tag{18}$$

trazadas con a como parámetro, están dadas en la fig. 3. Cualquiera que sea el valor del amortiguamiento, el máximo ocurre para $x = 1$, o sea para

$$w = w_o \tag{19}$$

o

$$C = K\,w^2 \tag{19 a}$$

y es tanto más pronunciado cuanto menor es A_o. Se tiene

$$y_{max} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2\,\alpha_o} \tag{13 a}$$

y

$$S_{ia\ max} = \frac{S_i}{2\,\alpha_o} = \frac{g}{A_o\,w_o} \tag{14 a}$$

Examinemos el defasaje; la relación (4) se escribe

$$tg\ \psi = \frac{A_o\,w}{C - K\,w^2} = \frac{a}{x^2 - 1}$$

$\psi(x)$ está representada por las curvas de la fig. 4, que pasan todas por $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y admiten $\psi = 0$ como asíntota. Para $x = 0$, ψ está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π, siendo tanto más próximo a π cuanto menor es A_o.

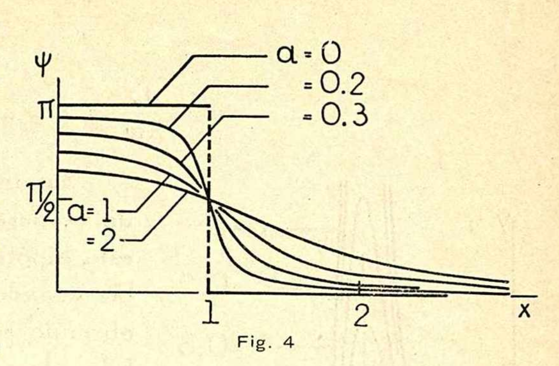


Fig. 4

b) *Acción sobre K, permaneciendo g, w y C constantes.*

En realidad, para obtener la resonancia no se actúa sobre K, porque si bien se hace variar K de manera discontinua cambiando el órgano móvil, se termina el ajuste por acción sobre C o, más raramente, sobre w. Sin embargo, para mayor generalidad, estudiaremos la regulación por variación continua de K.

Admitiremos que la variación de K no afecta A_o; esa hipótesis no se cumpliría por ejemplo en el caso de agregar una espira en corto-circuito a un galvanómetro de cuadro.

A partir de las ecuaciones (3) y (5) se obtiene

$$S_{ia} = \frac{\Theta_m}{I_m} = \frac{g}{\sqrt{(C - Kw^2)^2 + A_o{}^2 w^2}} = \frac{g}{C} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + a'^2}} \quad (20)$$

con x definido por la relación (17) y

$$a' = \frac{A_o w}{C} = \frac{2\, a_o}{x}$$

Examinemos la función

$$y = \frac{S_{ia}}{S_i} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + a'^2}} \quad (21)$$

representada por las curvas de la fig. 5 con a' como parámetro.

Cualquiera que sea el amortiguamiento, el máximo ocurre siempre para $x = 1$, es decir, para

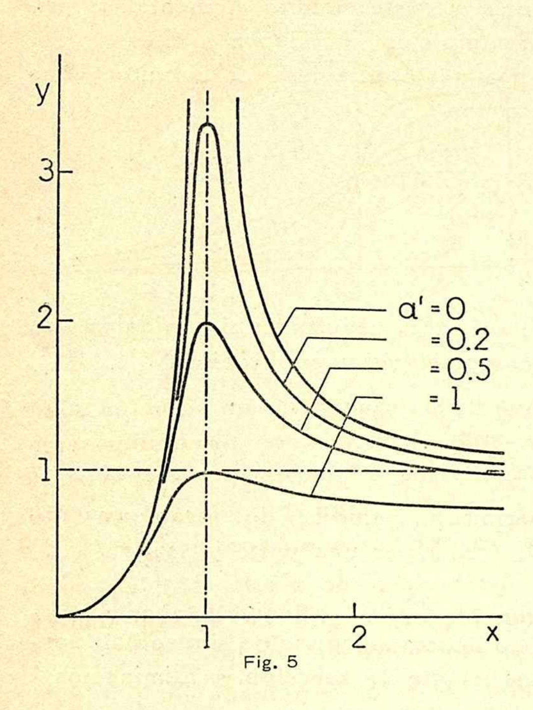


Fig. 5

$$w = w_o \quad (19)$$

siendo

$$y_{max} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{2\,\alpha_o} \quad (13a)$$

y

$$S_{ia\,max} = \frac{S_i}{2\,\alpha_o} = \frac{g}{A_o\,w_o} \quad (14\,a)$$

resultado idéntico al de la regulación por acción sobre C.

Examinemos el defasaje. La relación (4) se escribe

$$tg\,\psi = \frac{A_o\,w}{C - Kw^2} = \frac{a'}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Las curvas $\psi\,(x)$, representadas en la fig. 6, parten de $\psi = \pi$ para $x = 0$, pasan por $\psi = \frac{\pi}{2}$ para $x = 1$ y admiten asíntotas paralelas al eje de las x, de ordenadas crecientes con A_o.

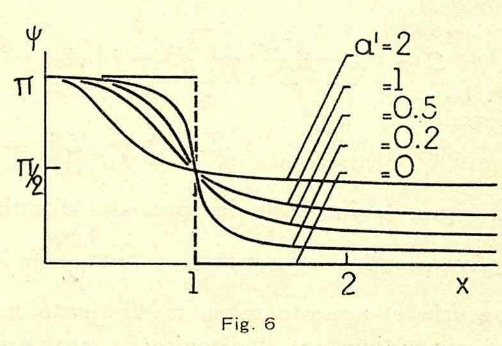


Fig. 6

3. *Acción sobre g, permaneciendo w, C y K constantes.*

A igualdad de los otros factores $S_{i\alpha}$ aumenta proporcionalmente a g.

3. Funcionamiento del galvanómetro de resonancia bajo tensión de amplitud constante. — Consideremos ahora el caso de un circuito que contiene en serie una impedancia, el galvanómetro y un generador de f.e.m. $e = E_m\,sen\,wt$ de amplitud y pulsación cons-

tantes. Designemos por R la resistencia total y por Lw la reactancia total del circuito cuando el órgano móvil del galvanómetro está en reposo. La importancia de este circuito elemental es primordial, ya que los circuitos complejos se reducen a él.

Sea i la corriente que realmente atraviesa el circuito. Las ecuaciones de funcionamiento son

$$K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + A_o \frac{d\Theta}{dt} + C\,\Theta = gi \qquad (22)$$

$$e - g \frac{d\,\Theta}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} \qquad (23)$$

En régimen estacionario Θ e i son magnitudes sinusoidales y se puede escribir con notación compleja (ver la publicación N.° 1, 16) [1]

$$(C - K\,w^2)\,\Theta + j\,A_o\,w\,\Theta = g\,\mathbf{I} \qquad (24)$$

$$\mathbf{E} = (R + j\,L\,w)\,\mathbf{I} + j\,g\,w\,\Theta \qquad (25)$$

Estas ecuaciones nos permitirán estudiar dos problemas importantes: la variación de Θ_m (E_m) por una parte y la de I (E) por otra.

4. Estudio de la variación de Θ_m (E_m). Sensibilidades en tensión sinusoidal y en intensidad ficticia en corriente sinusoidal. Sensibilidad máxima en volt. Coeficiente de reacción. — Eliminemos $\mathbf{I}$ entre las ecuaciones (24) y (25); se obtiene

$$\left[C - \left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2\right]\Theta + j\left(A_o + \frac{g^2 R}{Z^2}\right) w\,\Theta = g\,\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = g\,\mathbf{I}' \qquad (26)$$

donde

$$\mathbf{Z} = R + j\,L\,w = Z \angle \gamma \qquad (27)$$

designa la impedancia total del circuito con el órgano móvil del galvanómetro en reposo, e $\mathbf{I}' = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}}$ es la corriente ficticia que atravesaría el aparato si su movimiento no introdujese ninguna fuerza electromotriz en el circuito; la corriente $\mathbf{I}'$ [2] sólo se confundiría

(1) Los vectores se representan por letras negritas; las amplitudes se distinguen por el subíndice m; los valores eficaces e instantáneos de las magnitudes eléctricas se representan por mayúsculas y minúsculas respectivamente.

(2) Por razones de comodidad adoptamos para las intensidades real y ficticia notaciones inversas a las empleadas en la publicación N.° 3, 10.

con la real **I** si la f.e.m. $g w \Theta_m$ fuese despreciable frente a E_m.

La comparación de la ecuación (26) con la (24) demuestra que desde el punto de vista del movimiento, todo ocurre como si la f.e.m. $-g \frac{d\Theta}{dt}$ no existiese pero el momento de inercia del aparato hubiese disminuído en $\frac{g^2 L}{Z^2}$ y el coeficiente de amortiguamiento hubiese aumentado en $\frac{g^2 R}{Z^2}$.

Deducimos inmediatamente de (26)

$$\Theta_m = \frac{g\ E_m}{Z\sqrt{\left[C-\left(K-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2\right]^2+\left[A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right]^2 w^2}} =$$

$$= \frac{g\ I'_m}{\sqrt{\left[C-\left(K-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2\right]^2+\left[A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right]^2 w^2}} \qquad (28)$$

siendo la diferencia de fase entre Θ y **E**

$$\varphi = \gamma + \psi' \qquad (29)$$

donde ψ' es la diferencia de fase entre Θ e **I'**, dada por

$$\psi' = arctg \frac{\left(A_o + \frac{g^2R}{Z^2}\right) w}{C - \left(K - \frac{g^2L}{Z^2}\right) w^2} \qquad (30)$$

La relación (28) define la sensibilidad en tensión sinusoidal

$$S_{ta} = \frac{\Theta_m}{E_m}$$

y también la sensibilidad en intensidad ficticia en corriente sinusoidal

$$S'_{ia} = \frac{\Theta_m}{I'_m}$$

magnitud que hemos introducido por juzgarla interesante para la mejor comprensión de los fenómenos.

En lo sucesivo, al hablar de sensibilidades suprimiremos las

palabras "sinusoidal" o "en corriente sinusoidad", siempre que ello no preste a confusión.

En circuitos complejos E designa la d.d.p. entre los extremos de la rama del galvanómetro cuando ésta está abierta; la intensidad ficticia se calcula sin dificultad por el teorema de *Thévenin* generalizado, puesto que la impedancia del galvanómetro considerada no depende del movimiento.

A impedancia Z y pulsación w dadas, la variación de S'_{ia} o de S_{ta} en función de C (regulación usual) se representa por las curvas y (x) de la fig. 3, establecidas para el funcionamiento a corriente de amplitud constante. Se escribe

$$S'_{ia} = \frac{g}{\left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2} \; \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + a^2}} = \frac{g}{\left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2} \, y \qquad (31)$$

donde

$$x = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{C}{K - \frac{g^2 L}{Z^2}}} \qquad (32)$$

y el parámetro a

$$a = \frac{A_o + \frac{g^2 R}{Z^2}}{\left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w} \qquad (33)$$

En particular, cualquiera que sea A_o, el máximo de S'_{ia} o de S_{ta} ocurre para $x = 1$, o sea para

$$C = \left(K - \frac{g^2 L}{Z^2}\right) w^2 \qquad (34)$$

lo que da, sustituyendo en (28)

$$S_{ta\,max} = \frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{Z A_o w \left(1 + \frac{g^2 R}{A_o Z^2}\right)} = \frac{1}{A_o w \left(\frac{Z}{g} + \frac{g R}{A_o Z}\right)} \qquad (35)$$

y

$$S'_{ia\,max} = \frac{\Theta_{m\,max}}{I'_m} = S_{ta\,max} Z = \frac{g}{A_o w \left(1 + \frac{g^2 R}{A_o Z^2}\right)} = \frac{S_{ta\,max}}{h} \qquad (36)$$

haciendo

$$h = 1 + \frac{g^2 R}{A_o Z^2} \qquad (37)$$

Obsérvese que si se regula C para realizar la condición (19a), los valores de S_{ta} y S'_{ia} correspondientes pueden ser sensiblemente inferiores a sus máximos respectivos.

Veamos ahora la variación de la fase ψ'. Vale la relación $\psi = arctg \frac{a}{x^2 - 1}$ representada por las curvas de la fig. 4, pero con x y a definidos por (32) y (33) respectivamente. Cuando se realiza la condición (34) se tiene $\psi' = \frac{\pi}{2}$.

El examen de la relación (35) muestra inmediatamente que a R constante, la sensibilidad máxima en tensión pasa por un maximum maximorum para

$$\frac{Z}{g} = \frac{g\,R}{A_0\,Z} \tag{38}$$

con

$$S_{ta\,\substack{max\\max}} = \frac{\Theta_{m\,\substack{max\\max}}}{E_m} = \frac{1}{2\,w\,\sqrt{A_0\,R}} \tag{39}$$

Se puede pues poner (35) bajo la forma

$$S_{ta\,max} = S_{ta\,\substack{max\\max}} \frac{2\sqrt{\frac{R}{A_0}\,\frac{g}{Z}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{R}{A_0}\,\frac{g}{Z}}\right)^2} \tag{40}$$

expresión del mismo tipo que la (38a) del capítulo III de la publicación N.° 2: $\frac{S_{ta\,max}}{S_{ta\,\substack{max\\max}}}$ en función de $\frac{R}{A_0}\,\frac{g^2}{Z^2}$ está dada por la curva de la fig. 7, III, publicación N.° 2. El máximo de esta curva, es poco pronunciado, lo que es importante, porque reduce el interés de la regulación que realiza la condición (38), suplementaria de la regulación relativa a la condición (34), que, naturalmente, debe efectuarse siempre.

La regulación para realizar la condición (38) puede hacerse por acción sobre L (variación de Z a $R = Cte$), o sobre g. La constante g puede modificarse con relativa facilidad, cambiando las bobinas en los aparatos de imán móvil, y haciendo variar la inducción en el entrehierro en los aparatos de cuadro móvil.

Consideremos ahora la relación (36). A $g = Cte$, $S'_{ia\,max}$ aumenta

con Z, tendiendo hacia $S_{ia\ max}$. Haciendo variar g a Z constante, la sensibilidad máxima en intensidad ficticia pasa por un máximo cuando se cumple la condición (38), con

$$S'_{ia\ max \atop max} = \frac{g}{2\ A_o\ w} = \frac{S_{ia\ max}}{2} \qquad (41)$$

La sensibilidad maximum maximorum en intensidad ficticia a $Z = Cte$ es pues la mitad de la máxima en intensidad que se obtendría para el mismo valor de g en un circuito en que la fuerza electromotriz $g\ w\ \Theta_m$, inducida por el movimiento del órgano móvil del galvanómetro, fuera despreciable frente a la f.e.m. E_m que actúa en él.

Consideremos ahora el caso particular importante $L = 0$, o sea $Z = R$. La condición de resonancia es

$$C = K\ w^2 \qquad (19a)$$

en lugar de (34), resultado evidente a priori, porque en ausencia de self, todo pasa, por el hecho del movimiento, como si sólo el coeficiente de amortiguamiento de la ecuación de movimiento cambiase, pasando de A_o a $A_o + \frac{g^2}{R}$.

Las relaciones (35) y (36) se escriben

$$S_{ta\ max} = \frac{g}{A_o\ w\ R\left(1 + \frac{g^2}{A_o\ R}\right)} = \frac{S'_{ia\ max}}{R} \qquad (42)$$

Las sensibilidades máximas en tensión y en intensidad ficticia pasan a su vez por un máximo, a $R = Cte$, cuando se hace variar g para realizar

$$A_o = \frac{g^2}{R} \qquad (43)$$

con

$$S'_{ia\ max \atop max} = \frac{g}{2\ A_o\ w} = S_{ta\ max \atop max}\ R \qquad (44)$$

Compárense las relaciones (44) y (41). Veremos en el parágrafo 6 que en el funcionamiento regulado a maximum maximorum de sensibilidad, o sea cumpliéndose las condiciones (34) y (38),

el circuito, aún cuando tenga self, se comporta como puramente resistente.

El estudio que antecede demuestra que la sensibilidad máxima en intensidad es insuficiente para caracterizar la sensibilidad del aparato en un circuito en que $g\,w\,\Theta_m$ no es despreciable frente a E_m, y es necesario agregar otros datos. Se ha considerado a este efecto el funcionamiento en un circuito puramente resistente. A $g = Cte$, la sensibilidad máxima en intensidad ficticia se confunde prácticamente, si la resistencia del circuito es suficientemente grande, con la sensibilidad máxima en intensidad: es el caso límite estudiado en primer lugar. Cuando la resistencia del circuito disminuye, disminuye también la sensibilidad máxima en intensidad ficticia, que es lo menor posible cuando la resistencia es mínima, o sea cuando el galvanómetro está en corto-circuito. Se tiene entonces, teóricamente, $R = R_g$; es el segundo caso límite. Siempre a $g = Cte$, la sensibilidad máxima en tensión varía en sentido inverso que la sensibilidad máxima en intensidad ficticia: muy pequeña cuando R es muy grande, aumenta cuando R disminuye y alcanza el máximo para $R = R_g$. Este segundo caso límite ha servido para definir convencionalmente la sensibilidad máxima en volt, $S_{Va\,max}$, magnitud que se utilizó a los efectos de la clasificación de los galvanómetros, al lado de la sensibilidad máxima en intensidad. Se tiene

$$S_{Va\,max} = \frac{g}{A_0\,w\,R_g\left(1 + \dfrac{g^2}{A_0\,R_g}\right)} \qquad (45)$$

En realidad lo que interesa es $S_{ta\,max}$ o $S'_{ia\,max}$ en un circuito dado de impedancia **Z**. Para calcularlas es cómodo introducir h_0, valor que toma en corto-circuito el coeficiente h, suponiendo despreciable la reactancia propia del aparato

$$h_0 = 1 + \frac{g^2}{A_0\,K} = \frac{S_{Va\,max}\,R_g}{S_{ia\,max}} \qquad (46)$$

Indicando $S_{ia\,max}$, R_g y h_0 se puede prescindir en los catálogos de $S_{Va\,max}$, que sólo representa el valor máximo que puede tomar $S_{ta\,max}$. A h_0 se le puede dar el nombre de *coeficiente de reacción*; veremos un poco más adelante que también presenta interés por otras razones.

Para un valor de g dado, la sensibilidad máxima en intensidad ficticia en un circuito de impedancia total Z y de resistencia total R, se calcula a partir de (36) y (46)

$$S'_{ia\ max} = \frac{S_{ia\ max}}{1 + (h_o - 1)\dfrac{R_g\ R}{Z^2}} \tag{47}$$

y en el caso particular del circuito puramente resistente

$$S'_{ia\ max} = \frac{S_{ia\ max}}{1 + (h_o - 1)\dfrac{R_g}{R}} \tag{48}$$

Por supuesto es equivalente calcular la sensibilidad máxima en tensión $S_{ta\ max} = \dfrac{S'_{ia\ max}}{Z}$ en vez de la máxima en intensidad ficticia.

El valor de h_o es el mayor que puede tomar h si el circuito es puramente resistente, pero no si la reactancia propia del aparato es importante. En este último caso se tendrá en corto circuito

$$h'_o = 1 + \frac{g^2\ R_g}{A_o\ Z_g{}^2} \tag{49}$$

expresión que aumenta agregando una resistencia en serie con R_g si $R_g < L_g w$. Hay que observar que es siempre h'_o y no h_o lo que se mide experimentalmente, y es el valor de h'_o el que debería servir para calcular $S_{ta\ max}$ o $S'_{ia\ max}$. Así el denominador de la relación (47) se escribiría

$$h = 1 + (h'_o - 1)\frac{Z_g{}^2\ R}{R_g\ Z^2}$$

pero como en general se tiene prácticamente $Z_g = R_g$, la relación (47) es suficiente.

Si el valor de h_o es grande, el empleo del galvanómetro de resonancia es en general poco cómodo: en efecto, su amortiguamiento varía entonces mucho con la impedancia del circuito y, como veremos, no solamente la sensibilidad máxima, sino también otras propiedades del galvanómetro resultan afectadas, por ser función del

amortiguamiento. Para disminuir h_0 se puede aumentar A_0; para esto se agrega por ejemplo una espira en corto-circuito si se trata de un galvanómetro de cuadro móvil (hay que tener en cuenta que el momento de inercia cambia) o bien, si se trata de un aparato de imán móvil, se hace oscilar el imán cerca de una masa de cobre. Sin embargo la elección de A_0 está en general impuesta por el conjunto de propiedades del aparato (ver el parágrafo 11), y la regulación de h_0 se hace obrando sobre g.

La sensibilidad máxima en volt es un caso particular de la sensibilidad máxima en tensión; pasa pues por un maximum maximorum cuando se cumple la condición (43) donde se hace $R = R_g$, o sea para $h_0 = 2$. No obstante, ciertos autores aconsejan un valor de h_0 menor (p. ej. *1,5* según *Schering*) para que las características del aparato dependan poco de la resistencia del circuito; la disminución de la sensibilidad máxima en volt no es muy grande, porque, como dijimos, el maximum maximorum es poco pronunciado. En los aparatos muy sensibles en intensidad se tratará evidentemente de hacer g lo mayor posible.

Observemos que en el caso de los galvanómetros de imán que contienen hierro se debe tomar como R_g el valor de la resistencia de las bobinas, medida en corriente alterna, con el sistema móvil quitado; así se puede tener en cuenta la variación aparente de la resistencia debida a las pérdidas en el hierro, que no estaría comprendida en una medida en corriente continua.

5. Sensibilidades prácticas máximas por microampere y por microvolt en corriente sinusoidal de pulsación dada. — La sensibilidad práctica máxima (o en resonancia) por microampere en corriente sinusoidal de pulsación dada, $S_{\mu A\, max^{-1}}$, se define como el ancho (doble de la amplitud de la oscilación) del spot, leído sobre una escala graduada en mm, colocada a 1m del espejo, producido por una corriente sinusoidal de esa pulsación, de valor eficaz igual a 1 μ A, cuando se cumple la condición (19) de resonancia. Hay que recordar que esta definición sólo vale a corriente de amplitud constante, es decir, cuando la fuerza contraelectromotriz $g\, w\, \Theta_m$ es despreciable frente a la f.e.m. E_m que obra en el circuito. Resulta pues, estando I_m en ampere

$$S_{\mu A\, max^{-1}} = \frac{2\, d_{max}\ \mathrm{mm}}{D\mathrm{m}(I_m / \sqrt{2})\, 10^6} = \frac{2\Theta_{m\, max}}{I_m / \sqrt{2}} \cdot \frac{2.10^3}{10^6} = 4\ \sqrt{2}.10^{-3}\, S_{ia\, max} =$$

$$= 4\sqrt{2}.10^{-3}\frac{g}{A_o\, w_o}\ \text{mm/m.}\mu\text{A} \qquad (50)$$

donde A_o, g y w_o están evidentemente expresados en un sistema coherente que tenga el ampere como unidad de corriente. Si con la misma regulación del aparato se determina $S\mu A^{-1}$, sensibilidad práctica por microampere en corriente continua del galvanómetro [publicación N.° 2, capítulo **III, 6**, fórmula (19)], resulta inmediatamente

$$\frac{S\mu A^{-1}}{S\mu A_{max}^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{A_o}{2\sqrt{KC}} = \frac{\alpha_o}{\sqrt{2}} \qquad (51)$$

En la misma forma se define la sensibilidad máxima práctica por microvolt en corriente sinusoidal de pulsación dada como el ancho del spot, leído sobre una escala graduada en mm, colocada a 1m del espejo, producido por una d.d.p. sinusoidal de esa pulsación, de valor eficaz igual a 1 μ V, aplicada en los bornes del galvanómetro, cuando se cumple la condición de resonancia. Resulta

$$S\mu V_{max}^{-1} = \frac{2\, d_{max}\,\text{mm}}{Dm(U_m/\sqrt{2})\ 10^6} = \frac{2\ \Theta_{m\ max}}{U_m/\sqrt{2}}\cdot\frac{2.10^3}{10^6} =$$

$$= 4\sqrt{2}.10^{-3}\, S_{Va\ max} = 4\sqrt{2}.10^{-3}\frac{g}{A_o\, w\, Z_g\, h'_o} \cong$$

$$\cong 4\sqrt{2}.10^{-3}\frac{g}{A_o\, w_o\, R_g\, h_o}\ \text{mm/m.}\mu\text{V} \qquad (52)$$

observando que la reactancia del aparato es en general despreciable.

Se escribe, teniendo en cuenta (50)

$$S\mu V_{max}^{-1} = \frac{S\mu A_{max}^{-1}}{Z_g\, h'_o} \cong \frac{S\mu A_{max}^{-1}}{R_g\, h_o} \qquad (53)$$

relación de la que se deduce h_o.

6. Circuito equivalente del galvanómetro de resonancia. — Eliminemos Θ entre las ecuaciones (24) y (25); se obtiene

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}\left\{\left[R + \frac{A_o\, w^2\, g^2}{(C - K\, w^2)^2 + A_o{}^2\, w^2}\right] + \right.$$

$$\left. + j\, w\left[L + \frac{(C - K\, w^2)\, g^2}{(C - K\, w^2)^2 + A_o{}^2\, w^2}\right]\right\} = \mathbf{I}\ (R' + j\, L'w) \qquad (54)$$

donde R' y $L' w$ reciben los nombres de resistencia y reactancia efectivas (equivalentes) del circuito. A causa del movimiento del órgano móvil todo pasa como si la resistencia y la reactancia del circuito aumentasen respectivamente en

$$r = \frac{A_o w^2 g^2}{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2} \tag{55}$$

y

$$lw = \frac{(C - K w^2) w g^2}{(C - K w^2)^2 + A_o{}^2 w^2} \tag{56}$$

que se llaman resistencia y reactancia de movimiento respectivamente. Haciendo

$$D = \frac{g^2}{A_o} \quad \text{y} \quad tg\, \xi = \frac{C - K w^2}{A_o w}$$

(55) y (56) se escriben

$$r = \frac{D}{1 + tg^2 \xi} = D \cos^2 \xi \quad \text{y} \quad lw = \frac{D\, tg\, \xi}{1 + tg^2 \xi} = D\, sen\, \xi \cos \xi$$

que demuestran que el lugar de los extremos del vector $\mathbf{Z} = r + j\, lw = Oa$ (fig. 7) es la circunferencia de diámetro $OA = D = \frac{g^2}{A_o}$.

Este resultado ha sido encontrado experimentalmente por *Kennelly* y sus colaboradores.

Se ve fácilmente que en un circuito con self donde se cumplen las condiciones (34) y (38) se tiene $r = R$ y $lw = -Lw$ o sea $R' = 2R$ y $L'w = 0$. El circuito se comporta como puramente resistente, su reactancia es anulada por la reactancia de signo contrario introducida por el movimiento del órgano móvil. Este resultado ya ha sido mencionado en el parágrafo 4. Se tiene entonces

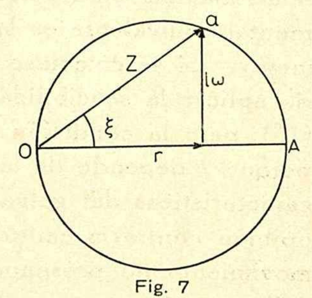


Fig. 7

$$I_m = \frac{E_m}{2R} = \frac{E_m - \frac{E_m}{2}}{R}$$

Todo pasa como si el galvanómetro anulase la reactancia del circuito e introdujese una fuerza contra-electromotriz de amplitud $\frac{E_m}{2}$.

Consideremos el caso de un circuito sin reactancia ($L=0$) y supongamos primero que se ha realizado la condición (19a) $C=K w^2$; se tiene $r=\frac{g^2}{A_o}$, $lw=0$; el punto a se sitúa en A (fig. 7). El efecto de la fuerza contra-electromotriz E_c se puede asimilar aquí a un simple aumento de la resistencia R del circuito, resultado evidente a priori si se observa que $E_c=-j g w \Theta$ está a $\frac{\pi}{2}$ atrás de Θ y en la resonancia Θ está a $\varphi=\psi'=\frac{\pi}{2}$ atrás de E: E_c y E están en oposición. Si no se cumple la condición de resonancia (19a), el punto representativo no está en A, y por el hecho del movimiento el galvanómetro introduce una reactancia, de self si $w_o > w$, de capacidad si $w_o < w$.

La impedancia de movimiento debe conocerse para poder calcular la corriente I que realmente pasa por el galvanómetro, pero no para calcular y discutir la indicación del mismo. A este último efecto basta determinar la intensidad ficticia I', lo que es inmediato, y considerar la sensibilidad máxima en intensidad ficticia $S'_{ia\ max}$; si se prefiere, se puede también partir de la d.d.p. E en los bornes de la rama del galvanómetro cuando está abierta y de la sensibilidad máxima en tensión $S_{ta\ max}$; la impedancia del circuito elemental equivalente es la del circuito real visto desde el galvanómetro. Si se calculase I, para determinar la desviación se debería aplicar la sensibilidad en intensidad S_{ia}, dada por la relación (16), pero la condición simple (19a) de máximo de S_{ia} ya no vale porque I depende de la impedancia de movimiento, o sea de las características del galvanómetro. Por lo tanto, y a pesar de la opinión contraria emitida por varios autores, la impedancia de movimiento no presenta interés para el estudio de la indicación del galvanómetro, para la elección del transformador intermedio (parágrafo 13), etc.

7. Sensibilidad máxima en intensidad del galvanómetro de resonancia a diversas frecuencias. — El par director C puede regularse entre los valores C_1 y C_2, de modo que el aparato es apto para funcionar entre las pulsaciones w_1 y w_2 correspondien-

tes. La relación $S_{ia\ max} = \frac{g}{A_o w}$ muestra que la sensibilidad máxima en intensidad disminuye cuando $w = w_o$ aumenta; para definir más exactamente la ley de esta disminución en los aparatos en que se hace variar la longitud de los hilos de suspensión, hay que observar que a causa de la histéresis elástica A_o aumenta en forma notable si se disminuye mucho la longitud de dichos hilos para hacer crecer la frecuencia propia.

Para ensanchar el intervalo de frecuencias de empleo del aparato se utilizan sistemas móviles intercambiables.

El momento de inercia del órgano móvil a frecuencias elevadas debe ser muy pequeño, lo que no deja de ocasionar dificultades. En efecto, el valor mínimo aceptable del brillo limita la reducción de las dimensiones del espejo; por otra parte la disminución del número de espiras del cuadro o de las dimensiones del imán se traduce por una reducción de g y es preciso aumentar g para conservar un valor satisfactorio de $S_{ia\ max}$ no obstante el valor elevado de w.

8. Sensibilidad a las armónicas. — El galvanómetro de resonancia debe ser poco sensible a las armónicas; en caso contrario, al emplearlo como aparato de cero, y no obstante no pasar corriente a la frecuencia fundamental, el galvanómetro puede acusar una oscilación debida a las armónicas, que falsea las medidas. Para darse cuenta de la influencia de las armónicas en el caso más general, es necesario considerar la sensibilidad en tensión (o, si se quiere, en intensidad ficticia), pero para tener una idea del orden de magnitud de esa influencia nos basta considerar el caso límite de funcionamiento a corriente de amplitud constante. El resultado así obtenido valdrá también para la sensibilidad en tensión si el circuito es puramente resistente a condición de reemplazar A_o por $A_o h$.

La amplitud de la oscilación debida a la armónica $i_n = I_{m\,n} \operatorname{sen} nwt$ es

$$\Theta_{m\,n} = \frac{g\, I_{m\,n}}{\sqrt{(C - K n^2 w^2)^2 + A_o{}^2 n^2 w^2}} \qquad (57)$$

y si $C = K w^2$ (galvanómetro en resonancia sobre la onda fundamental) resulta

$$\Theta_{m\,n\ res} = \frac{g\, I_{m\,n}}{C \sqrt{(1 - n^2)^2 + 4 n^2 \alpha_o{}^2}} \qquad (58)$$

Como α_o es en general muy pequeño, la sensibilidad correspondiente a la armónica n se puede escribir

$$S_{ia\,n} \cong \frac{S_i}{n^2 - 1} \tag{59}$$

$S_{ia\,n}$ es casi independiente del amortiguamiento y varía aproximadamente en razón inversa al cuadrado del orden de la armónica.

Por el contrario la sensibilidad relativa a las armónicas (inversa de la selectividad)

$$\frac{S_{ia\,n}}{S_{ia\,max}} = \frac{2\,\alpha_o}{n^2 - 1} \tag{60}$$

que es la característica realmente importante, depende del amortiguamiento, y es tanto menor cuanto menor es α_o, resultado evidente a priori, ya que la curva de resonancia es entonces más aguda.

En el caso general del circuito con reactancia, el resultado depende también de la impedancia del circuito, que es diferente para la onda fundamental y para las armónicas.

9. Influencia de la variación de la frecuencia. Ancho de resonancia. — *Wenner* definió el ancho de resonancia como la variación relativa de la frecuencia que reduce Θ_m a la mitad de su valor máximo. Consideremos el caso del galvanómetro funcionando a corriente de amplitud constante; expresemos que para $w = w_1$, $\Theta_{m\,1}$ es la mitad de $\Theta_{m\ max}$, indicación correspondiente a $w = w_o$

$$\Theta_{m1} = \frac{g\ I_m}{\sqrt{(C - K w_1^{\,2})^2 + A_o^{\,2} w_1^{\,2}}} = \frac{1}{2}\ \frac{g\ I_m}{A_o\, w_o} \tag{61}$$

de donde, teniendo en cuenta que α_o es pequeño

$$w_1 \cong w_o\,(1 \pm \alpha_o \sqrt{3}\,) \tag{62}$$

Resulta pues

$$a = \frac{w_1 - w_o}{w_o} \cong \pm\, \alpha_o \sqrt{3} \tag{63}$$

En el circuito a tensión constante se parte de la relación (28); la variación de la impedancia del circuito con la frecuencia es un factor muy importante. La amplitud de la osilación

$$\Theta_m = S_{ia}\, E_m = S'_{ia}\, I'_m$$

depende a la vez de $S'_{ia}(w)$ y de $I'_m(w)$. Así en un circuito dado donde la corriente ficticia I'_m está en resonancia eléctrica para w' (fig. 8), mientra que $S'_{ia}(w)$ tiene su máximo para w'', el producto $S'_{ia}\ I'_m$, o si se prefiere $S_{ta}\,(E_m = Cte)$, puede ser mantenido sensiblemente constante entre w' y w'': se obtiene así un galvanómetro de sensibilidad en tensión prácticamente constante en una amplia gama de frecuencias. Es el principio del galvanómetro de *Meissner* y *Adelberger* (ver al parágrafo 20).

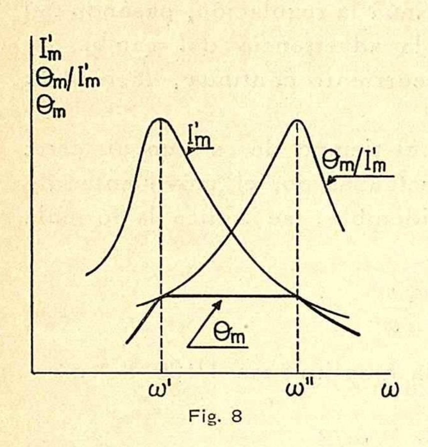


Fig. 8

En un circuito puramente resistente, se puede admitir en primera aproximación que, a tensión constante, se tiene también

$$a \cong \pm\, \alpha \sqrt{3}$$

donde

$$\alpha = \alpha_o\, h$$

10. Régimen transitorio: duración de extinción. —El movimiento del órgano móvil en régimen transitorio está dado por la superposición de los relativos a los regímenes libre y estacionario.

Sea $i = I_m\ sen\ (wt + \varphi)$ la corriente, y $\Theta = \Theta_m\ sen\ (wt + \varphi - \psi)$ la desviación en régimen estacionario; observando que en los galvanómetros de resonancia el movimiento propio es siempre periódico amortiguado, el movimiento resultante en régimen transitorio es

$$\Theta = Ae^{-bt}\ sen\ (b''t + \zeta) + \Theta_m\ sen\ (wt + \varphi - \psi) \qquad (64)$$

donde A y ζ sólo dependen de las condiciones iniciales (ver p.ej. la fig. 20 de la publicación N.° 1, 16 para el caso de $w/w_o = 0.95$, $\alpha = 0{,}05$, partiendo el móvil del cero y del reposo).

El régimen estacionario se establece al cabo de cierto tiempo tanto mayor cuanto menor es el amortiguamiento. Hay interés en que prácticamente ese tiempo no sea superior a $2-3$ segundos, porque las medidas se hacen largas y penosas. Por ejemplo, supongamos que se busca el equilibrio de un puente haciendo variar la impedan-

cia de una de sus ramas. Al anularse la corriente, el galvanómetro vuelve al cero, pero si ese retorno es muy lento, el operador puede atribuir la lentitud a la modificación insuficiente de la impedancia que está regulando y continúa la regulación, pasando del valor de equilibrio. No existiendo la advertencia del cambio de sentido de la desviación, como en corriente continua, la medida se ve comprometida.

Se debe pues tener en cuenta el tiempo de retorno al cero; como el número de oscilaciones efectuadas por el móvil antes de estabilizarse el movimiento es considerable, se aplica la fórmula 117 de la publicación N.° 1, 10:

$$\frac{t_r}{T_o} = \frac{\log_e n}{2\pi\alpha}$$

El tiempo necesario para que la amplitud sea 1/100 de su valor primitivo es pues

$$t_{r\,100} = 0{,}73 \; \frac{T_o}{\alpha} = \frac{0.73}{\alpha f_o} \qquad (65)$$

y para que sea 1/10 de su valor primitivo, tiempo tomado frecuentemente como base de comparación

$$t_{r\,10} = \frac{1}{2}\, t_{r\,100} = \frac{0.37}{\alpha f_o} \qquad (66)$$

11. Resumen de la influencia del amortiguamiento sobre las características del aparato. — Consideremos el funcionamiento a corriente de amplitud constante. Hemos visto que el amortiguamiento obra sobre

1) la sensibilidad práctica máxima por microampere $S_{\mu A\,max}^{-1} = S_{\mu A}^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{\alpha_o}$, tanto mayor cuanto menor es α_o.

2) la inversa de la selectividad, o sensibilidad relativa a las armónicas, tanto menor cuanto menor es α_o.

3) el ancho de resonancia $a = \dfrac{w_1 - w_o}{w_o} \cong \alpha_o \sqrt{3}$, tanto menor ($w_1$ más próximo a w_o) cuanto menor es α_o.

4) el tiempo de retorno al cero $t_{r\,10} = \dfrac{0.37}{\alpha_o f_o}$ tanto mayor cuanto menor es α_o.

Así por ejemplo, para $\alpha_o = 0{,}002$, la sensibilidad práctica por microampere en resonancia es 707 veces la del aparato en corriente

continua, y la sensibilidad a la armónica 3 es $1/2000$ de la relativa a la onda fundamental. Una variación de $a = 0,34\ ^\circ/_\circ$ en la frecuencia de alimentación reduce Θ_{max} a la mitad, y a la frecuencia de 50 Hz hay que esperar $3,7$ segundos para que en régimen transitorio el ancho del spot no difiera del correspondiente al nuevo régimen estacionario en más del $10\ ^\circ/_\circ$ de la variación sufrida: es aproximadamente el tiempo que hay que esperar después de realizada una modificación en la rama de un circuito para estar seguros de su influencia sobre la desviación.

La constancia de la frecuencia de la fuente es pues una guía en la elección de α_o, que podrá ser tanto menor cuanto más estable sea la frecuencia. Pero no conviene exagerar en ese sentido para que la duración de la extinción no sea excesiva; si se fija $t_{\frac{r}{10}} = 1$ s resulta $\alpha_o = \frac{0,37}{f_o}$, o sea $\alpha_o = 0,0074$ a 50 Hz.

En el caso de disponer de un galvanómetro de resonancia muy poco amortiguado, se puede agregar una espira en corto-circuito sobre el cuadro, si el aparato es de cuadro móvil, o hacer oscilar la aguja sobre una masa de cobre de posición generalmente regulable, si el aparato es de imán móvil En ciertos casos se puede aumentar el amortiguamiento shuntando el galvanómetro, lo que equivale a abandonar el funcionamiento a intensidad de amplitud constante.

Si el circuito es puramente resistente, en el funcionamiento a tensión constante vale lo que se dijo sobre la influencia del amortiguamiento en los puntos 1), 2), 3) y 4), reemplazando α_o por $\alpha = \alpha_o\, h$; de aquí la importancia del factor h. Se observará que en el punto 1) en vez de $S\mu A_{max}^{-1}$ se debe considerar ahora $S'\mu A_{max}^{-1}$, sensibilidad práctica ficticia por microampere: $S'\mu A_{max}^{-1} = 4\sqrt{2}.10^{-3} S'_{ia\,max}$.

12. Shunt. Resistencias adicionales. — La discusión del problema del shuntado es análoga a la hecha en el parágrafo 13 de la publicación N.° 2, **III**, a propósito de los galvanómetros de corriente continua. Consideremos el circuito elemental que comprende en serie la f.e.m. $e = E_m \operatorname{sen} wt$, una impedancia Z_e que incluye la del generador y el galvanómetro de impedancia Z_g cuando el órgano móvil está en reposo. Shuntemos el galvanómetro por una impedancia Z_s. La corriente ficticia en el galvanómetro, primitivamente

$$I'_1 = \frac{\mathbf{E}}{Z_e + Z_g} \qquad (67)$$

pasa a ser

$$I'_2 = \frac{E}{m Z_e + Z_g} \qquad (68)$$

donde

$$m = \frac{Z_g + Z_s}{Z_s} \qquad (69)$$

Como en corriente continua, se observa que si Z_e es pequeña frente a Z_g la acción del shunt es poco marcada; para reducir la corriente ficticia a $\frac{1}{m}$ de su valor es necesario, o bien que Z_g sea despreciable frente a Z_e, como ocurre en el caso límite de funcionamiento a corriente de amplitud constante, o bien que se mantenga constante la impedancia del circuito visto desde la fuente, agregando en serie con el conjunto galvanómetro shunt una impedancia de compensación $Z_g \left(1 - \frac{1}{m}\right)$.

Pero después de shuntado el galvanómetro, la indicación varía, no solamente porque cambia la corriente ficticia, sino también a causa de la modificación de la sensibilidad en intensidad ficticia, que depende del valor de la impedancia del circuito visto desde el galvanómetro; esta impedancia, primitivamente igual a $Z_g + Z_e$, se transforma en $Z_g + \frac{Z_e Z_s}{Z_e + Z_s}$. Puede ser éste un medio de aumentar el amortiguamiento, y por consiguiente el ancho de resonancia de un aparato, pero a condición de que, por una parte, la disminución de la corriente en el galvanómetro sea admisible y, por otra parte, h_0 tenga un valor suficientemente elevado; en muchos aparatos se trata actualmente de hacer h_0 igual o inferior a 2, y la acción sobre el ancho de resonancia por shuntado pierde en gran parte su interés.

Se puede mantener constante la sensibilidad en intensidad ficticia cuando se shunta el aparato, por medio de impedancias adicionales elegidas de modo que la impedancia del circuito visto desde el galvanómetro sea constante; pero tal procedimiento carece de interés práctico.

El shuntado es generalmente útil durante las primeras tentativas de búsqueda del equilibrio, cuando el galvanómetro se emplea como aparato de cero.

13. Empleo del galvanómetro de resonancia con transformador. Volvamos a considerar el circuito elemental del parágrafo prece-

dente. Se puede aumentar la indicación del galvanómetro alimentándolo por medio de un transformador. Nos limitaremos a estudiar el caso de un transformador ideal, de resistencias propias, fugas y corriente magnetizante despreciables. En tal caso, designando por k la relación entre el número de espiras secundarias (lado galvanómetro) y el número de espiras primarias, la f.e.m. reducida al lado secundario será $k\mathbf{E}$ y la impedancia total reducida al mismo lado será $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_e k^2$. Tenemos pues

$$\Theta_{m\,max} = k E_m S_{ta\,max}$$

de donde, teniendo en cuenta la relación (35)

$$\frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{A_o w} \frac{k}{Z + \dfrac{g^2}{A_o} \dfrac{R_g + R_e k^2}{Z}} \tag{70}$$

En particular, si $Z_g << Z_e k^2$, $R_g << R_e k^2$

$$\frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{A_o w} \frac{k}{Z_e k^2 + \dfrac{g^2}{A_o} \dfrac{R_e}{Z_e}} \tag{71}$$

expresión que pasa por un máximo para

$$k^2 = \frac{g^2}{A_o} \frac{R_e}{{Z_e}^2} = (h_o - 1) \frac{R_g R_e}{{Z_e}^2} \tag{72}$$

valor que no siempre es compatible con la hipótesis de partida.

Como otro caso particular consideremos el caso del circuito puramente resistente; $\mathbf{Z}_e = R_e$, $\mathbf{Z}_g = R_g$. Se tiene

$$\frac{\Theta_{m\,max}}{E_m} = \frac{g}{A_o w} \frac{k}{R_e k^2 + R_g h_o} \tag{73}$$

expresión que pasa por un máximo para

$$k^2 = \frac{R_g h_o}{R_e} \tag{74}$$

Los transformadores empleados son en general de tomas múltiples para extender su posibilidad de empleo.

14. Determinación experimental de las constantes del galvanómetro de resonancia.

1) *Determinación de* $S\mu A^{-1}$. La sensibilidad práctica por microampere en corriente continua se obtiene como en los galvanómetros de corriente continua (ver la publicación N.° 4, 6). Recuérdese que $S\mu A^{-1}$ depende del valor dado al par director.

2) *Determinación de* $S\mu A_{max}^{-1}$ *y de* α_o. La frecuencia de la fuente debe ser muy constante. Si la tensión es demasiado elevada se la reduce por un transformador T (fig. 9), y se aplica una parte de la tensión secundaria al galvanómetro de resonancia, en serie con una gran resistencia r frente a la cual la impedancia efectiva del galvanómetro es completamenta despreciable. Sea I la corriente en el galvanómetro, expresada en ampere; se calcula

Fig. 9

$I = \frac{Us}{S(r+s) - s^2}$ y se deduce en la resonancia

$$S\mu A_{max}^{-1} = \frac{2\, d_{max}\ \text{mm}}{D\ \text{m}\ I\ 10^6} \tag{75}$$

Si es necesario se aplica la corrección del arco tangente. La relación (51) da α_o.

3) *Medida de la resistencia* R_g. Se hace con corriente continua salvo en los galvanómetros de resonancia de imán con núcleo de hierro, en los que la medida debe hacerse en corriente alterna con el sistema móvil separado o bloqueado. En este caso se debe estudiar la influencia de la frecuencia.

4) *Medida del coeficiente de self-inducción* L_g. Se hace en un puente adecuado, con el órgano móvil separado o bloqueado.

5) *Determinación de* $S\mu V_{max}^{-1}$ *y de* h_o. Se emplea el esquema de la fig. 9 donde se suprime r y se da a s un valor muy pequeño, despreciable frente a la resistencia efectiva del galvanómetro de resonancia. La d.d.p. en los bornes de s es (estando abierto el circuito del galvanómetro) $E = U\frac{s}{S}$, y la impedancia del circuito visto desde el galvanómetro es $\mathbf{Z} = R_g + jL_g w + \frac{s(S-s)}{S}$ de donde

$$Z = \sqrt{\left[R_g + \frac{s}{S} (S - s) \right]^2 + L_g{}^2 w^2} \cong Z_g$$

si s es suficientemente pequeño. Se deduce, en la resonancia, estando E en volt

$$S\mu V_{max}{}^{-1} = \frac{2\, d_{max}\,\mathrm{mm}}{\mathrm{Dm}\, E\, 10^6} \qquad (76)$$

En este ensayo, como en el 2), es necesario que la frecuencia de la fuente sea muy constante.

La relación (53) da h_o.

6) *Determinación de la pulsación ideal de un galvanómetro con determinada regulación.* Se alimenta el circuito de la fig. 9 con una fuente de frecuencia regulable y conocida. Manteniendo constante la corriente que pasa por el galvanómetro, se regula la frecuencia de la fuente hasta que la desviación sea máxima; se tiene entonces

$$w = w_o \sqrt{1 - 2\, \alpha_o{}^2} \cong w_o$$

7) *Determinación completa de las constantes del galvanómetro.* De las relaciones (19a), (46), (50) y $\alpha_o = \dfrac{A_o}{2\sqrt{KC}}$ se deduce

$$K = 16.10^{-6} \frac{(h_o - 1)\, R_g}{(S\mu A_{max}{}^{-1})^2\, w_o{}^3\, \alpha_o} \text{ U.G.} \qquad (77)$$

Obsérvese que el valor de K obtenido experimentalmente no representa el momento de inercia del órgano móvil propiamente dicho sino ligeramente aumentado (en ~ 1 °/o) por la vibración del aire que lo rodea.

$$C = 16.10^{-6} \frac{(h_o - 1)\, R_g}{(S\mu A_{max}{}^{-1})^2\, w_o\, \alpha_o} \text{ U.G.} \qquad (78)$$

$$A_o = 32.10^{-6} \frac{(h_o - 1)\, R_g}{(S\mu A_{max}{}^{-1})^2\, w_o{}^2} \text{ U.G.} \qquad (79)$$

$$g = 5{,}65.10^{-3} \frac{(h_o - 1)\, R_g}{S\mu A_{max}{}^{-1}\, w_o} \text{ U.G.} \qquad (80)$$

La discusión de los ensayos deberá hacerse de acuerdo con los criterios expuestos en la publicación N.° 4.

15. Diferentes tipos de galvanómetros de resonancia. — Hay que distinguir entre los aparatos que tienen una frecuencia ideal única y los que admiten un número teóricamente infinito de frecuencias ideales, fundamental y armónicas; estos últimos se estudiarán en otro lugar.

Los aparatos de frecuencia ideal única usuales se dividen en dos grandes grupos: galvanómetros de imán móvil y galvanómetros de cuadro móvil. Los primeros son sensibles a los campos magnéticos exteriores de frecuencia igual a la de resonancia, que los pueden hacer vibrar sin que sus bornes estén reunidos a un circuito de medida; esa es precisamente una manera de verificar la existencia de tales campos parásitos. Estos galvanómetros se protejen en general por medio de pantallas magnéticas y se les debe mantener alejados de todo aparato que produzca campos perturbadores importantes, como ser transformadores con fugas considerables, bobinas de electroimanes, etc.

Los galvanómetros de resonancia de cuadro no son prácticamente influenciados por los campos exteriores. Los hilos de suspensión son finos y están muy tensos, lo que hace que se rompan con cierta facilidad.

Ambas clases de aparatos son muy sensibles a las vibraciones mecánicas a la frecuencia de resonancia; si es necesario, deben ser colocados sobre soportes antivibratorios.

Los galvanómetros de imán se emplean sobre todo a frecuencias inferiores a $\sim$ 150 Hz; a frecuencias superiores son preferibles los de cuadro.

Los galvanómetros pueden agruparse según la manera de producir el par director. En los aparatos de imán, el par director se debe, generalmente, a la acción conjunta de la elasticidad (casi siempre la torsión del hilo de suspensión) y de un campo magnético constante, producido por un imán o electroimán; la importancia relativa de estos pares varía según el modelo. En los aparatos de imán antiguos la regulación se efectuaba obrando sobre el par elástico; es el caso del galvanómetro de *Rubens* o del de *Wien*; este último ni siquiera tenía imán director. Pero ya en el de *Rubens* la regulación fina se hacía desplazando los imanes directores, y en los galvanómetros actualmente empleados la regulación se hace obrando sobre el imán permanente, cuya posición se hace variar (*Rump*) o que se shunta (*Drysdale, Agnew*) (obser-

vemos que en el aparato de *Agnew* el hilo se somete a flexión y no a torsión) o sobre la excitación de un electroimán (*Schering-Schmidt, Rump, Meissner-Adelberger, Blondel*).

Cuando se emplea un imán permanente el aparato es fácilmente transportable, pero los valores de la inducción obtenidos son menores.

En los galvanómetros de cuadro móvil el par director se debe generalmente sólo a la elasticidad de los hilos de suspensión; la regulación se efectúa obrando sobre la longitud (regulación gruesa) y la tension (regulación fina) de estos hilos. Pero se han realizado aparatos donde se agrega al par elástico un par director electromagnético, regulable a distancia (*Vuylsteke*).

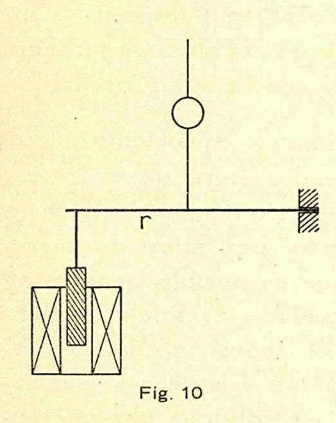


Fig. 10

La regulación continua a distancia de la frecuencia ideal por modificación del campo director es fácil en los aparatos de imán móvil con electroimán (parágrafos 18, 22); pero también se puede regular de manera continua y a distancia la tensión del hilo (*Silsbee*, según *Kennelly*). Se dispone a este efecto de un electroimán que atrayendo un núcleo flexa una lámina elástica *r*, a la que se fija la extremidad inferior del hilo de suspensión (fig. 10).

El par motor de los galvanómetros de cuadro móvil se calcula como en corriente continua (publicación N.° 2, **II, 1**). En los galvanómetros de imán móvil dicho cálculo ya no es exactamente el mismo que en continua (publicación N.° 2, **I, 1**), porque a causa de la presencia del hierro la determinación del campo es algo diferente; pero en general es fácil hacer un cálculo aproximado.

16. Teléfono óptico y galvanómetro de Wien. — Indiquemos el primer modelo del teléfono óptico de *Wien*, que puede ser considerado como prototipo de los galvanómetros de resonancia (fig. 11). Una pequeña pieza *p* de hierro dulce, fija sobre una membrana *m*, está sometida a la acción de un imán permanente *NS* que lleva un enrollamiento *A* recorrido por la corriente a revelar. La pieza vibra; su vibración se amplifica por medio de una palanca *l* y un resorte *r* que lleva en su extremo un espejo *M*, que refleja el rayo incidente sobre una escala. Después el sistema se modifi-

có un poco; se emplearon dos imanes en forma de *U*, situados de un lado y otro de la membrana, que obraban cada uno sobre una pieza de hierro dulce. La frecuencia ideal sólo se puede regular dentro de un intervalo muy reducido, variando la distancia entre los imanes y la membrana; se llegó a obtener una sensibilidad práctica máxima en intensidad del orden de 3 mm/m.μA. El amortiguamiento era elevado. Sería necesario disponer de toda una serie de membranas para responder a las diferentes frecuencias.

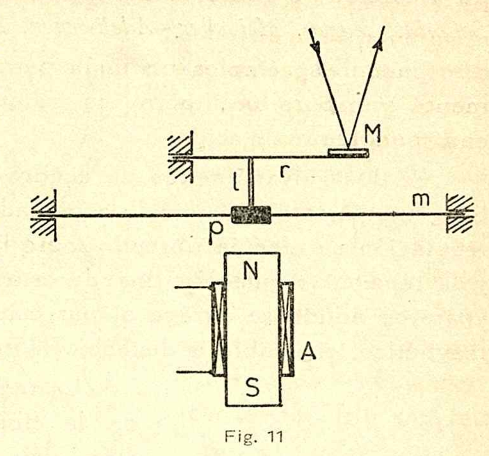
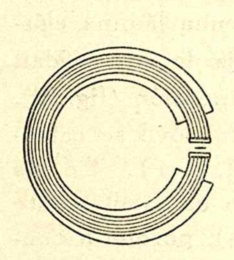


Fig. 11

Wien construyó también un galvanómetro consistente en algunos imanes de 3 mm de longitud, paralelos entre sí, y suspendidos por un hilo de bronce en el entrehierro de un electroimán en forma de toro cuyo núcleo está formado por hilos de hierro (fig. 12). Lleva cuatro enrollamientos que es posible acoplar de diversas maneras, destinados a recibir la corriente alterna a estudiar. En reposo los imanes están dirigidos paralelamente a las caras del entrehierro. La resonancia se obtiene obrando sobre la longitud del hilo de suspensión.


Fig. 12

El amortiguamiento se aumenta reduciendo el entrehierro por deformación del toro, ya que así crecen las pérdidas en el hierro; se lo hace más enérgico pegando plaquetas de cobre sobre las caras que delimitan el entrehierro.

Cuando las cuatro bobinas están en serie se indica una sensibilidad $S_{\mu A\, max}{}^{-1} = 70$ mm/m.μA a 100 Hz ; $\alpha_o = 0{,}015$.

17. Galvanómetro de Rubens. — Consiste en un juego de 20 pequeños imanes soldados a una cinta de bronce y suspendidos por un hilo de bronce en un campo creado por dos imanes en forma de *U*, con los polos de igual nombre enfrentados (fig. 13a). Los imanes llevan bobinas recorridas por la corriente a revelar, dispuestas de tal modo que cuando los polos situados sobre una

diagonal están reforzados, los de la otra diagonal están debilitados; los papeles de las diagonales se invierten en cada semi-período. En ausencia de corriente en las bobinas, las fuerzas F (fig. 13 b) mantienen el imán en la dirección del campo director; se puede admitir en primera aproximación que al enviar la corriente todo pasa como si las fuerzas F sufrieran los incrementos f dirigidos normalmente y que forman el par motor. La regulación aproximada del par director se hace obrando sobre la longitud del hilo de suspensión, que se hace variar por medio de dos puentes desplazables. La regulación fina se obtiene, sea obrando sobre la tensión del hilo, sea alejando o aproximando los imanes de la aguja.

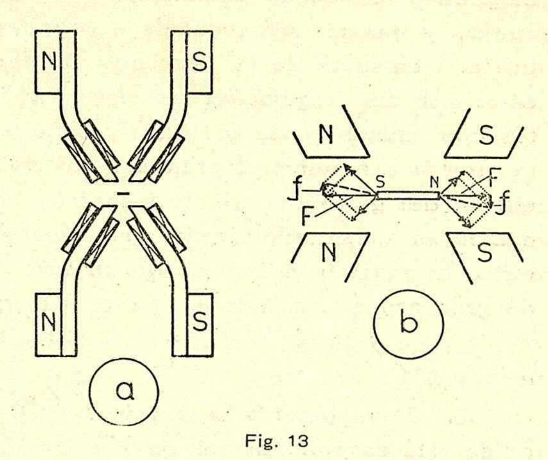


Fig. 13

Se obtiene una sensibilidad $S_{\mu A\ max}^{-1}$ del orden de 15 mm/m.μA a 100 Hz ; $\alpha_o \cong 0{,}01$; $h_o \cong 2{,}5$.

18. Galvanómetro de imán de Schering y Schmidt. — Es un perfeccionamiento del aparato de *Rubens* (fig. 14). Una simple aguja imantada reemplaza los numerosos imanes del galvanómetro de *Rubens*; se dispone de dos sistemas intercambiables ; uno de ellos se emplea entre 10 y 75 Hz y las dimensiones de su imán son 6 x 4 x 0,18 mm ; el otro se emplea entre 30 y 160 Hz y su imán tiene 4 x 4 x 0,6 mm. La suspensión es de bronce fosforoso, de $\sim$ 3 cm de longitud y 0,02 mm de diámetro. El amortiguamiento se regula por medio de una pieza de cobre que se

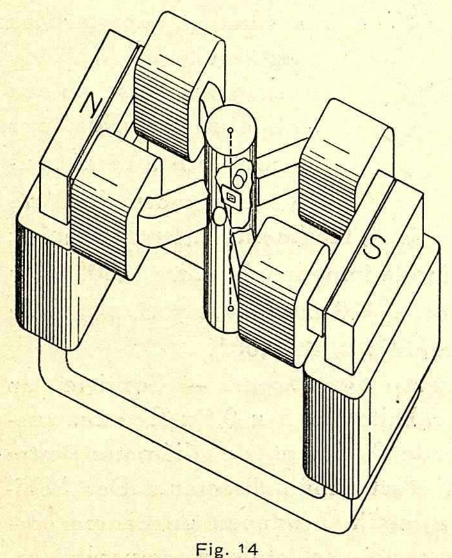


Fig. 14

puede acercar o alejar de la aguja. Un gran electroimán en *U* lleva un enrollamiento recorrido por corriente continua; el flujo magnético creado es canalizado por un par de imanes hasta la aguja, y puede ser regulado a voluntad por simple acción sobre la intensidad de la corriente continua de excitación: se obtiene así una regulación precisa y fácil del par director. Estos dos imanes llevan los enrollamientos que reciben la corriente alterna a revelar; el principio de funcionamiento es el mismo que el del galvanómetro de resonancia de *Rubens*, es decir, el campo es aumentado según una diagonal y disminuído según la otra. El aparato está colocado en una caja de fundición o chapa de gran espesor, que forma pantalla magnética.

La sensibilidad $S_{\mu A\ max}^{-1}$ es próxima a 10 mm/m. μA a 50 Hz; $\alpha_0 \cong 0{,}006$.

19. Galvanómetro de Drysdale-Tinsley. — Una aguja de hierro dulce está suspendida por un hilo de seda entre los polos de un imán permanente *NS* (fig. 15). El par director se debe principalmente a la acción de un campo regulable gracias al desplazamiento de un shunt magnético, cuya posición está dada por un índice. También se pueden apartar las piezas polares. Atrás de la suspensión se coloca la bobina recorrida por la corriente a medir, cuyo eje es normal al de la aguja. El aparato tiene varias bobinas, fácilmente intercambiables; así a 50 Hz se puede hacer variar la impedancia entre 0,005 Ω y 17500 Ω, pasando $S_{\mu A\ max}^{-1}$ de 0,08 a 100 mm/m.μA y $S_{\mu V\ max}^{-1}$ de 16 a 0,005 mm/m.μV respectivamente; $\alpha_0 \cong 0{,}001$.

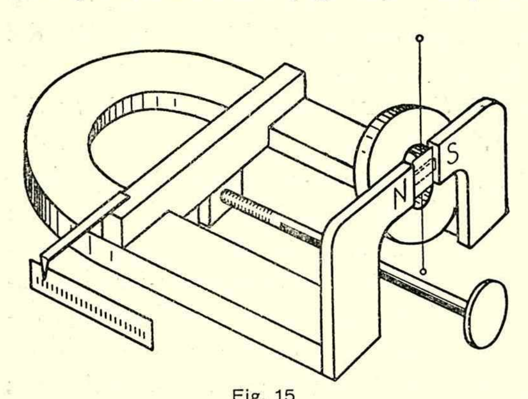


Fig. 15

20. Galvanómetro de Meissner y Adelberger. — Consiste en 2 pequeños imanes de acero al cobalto de 3 x 0,5 x 0,1 mm, suspendidos por un hilo de bronce de 0,15 mm de diámetro entre las piezas polares cónicas de un electroimán director. Dos bobinas, recorridas por la corriente a medir, producen un campo normal al campo director. La resonancia se obtiene actuando so-

bre la corriente de excitación del electroimán. La originalidad del sistema consiste en la adjunción de una capacidad en serie en el circuito del galvanómetro, que produce la resonancia eléctrica de la corriente para una pulsación determinada w'; la forma de esta curva de resonancia se puede regular fácilmente agregando resistencias. La curva de la resonancia mecánica $S'_{ia}(w)$ pasa por su máximo para una frecuencia w'' (fig. 8) y de acuerdo con lo que se ha dicho en el parágrafo 9, la sensibilidad en tensión se mantiene constante para un intervalo de frecuencias importante; así a 62 Hz una variación de la frecuencia de 23 °/o sólo afecta la sensibilidad S_{ta} en $\sim$ 0,5 °/o; se tiene $S_{\mu A\,max}^{-1} = 500$ mm/m.μA, $S_{\mu V\,max}^{-1} = 1{,}25$ mm/m.μV.

21. Galvanómetro de Blondel y Carbenay. — Este aparato fué utilizado en el análisis de la forma de onda de las corrientes alternas. Una pequeña paleta de hierro dulce está colocada en el eje de dos solenoides idénticos coaxiales, a igual distancia de ambos. Los solenoides están alimentados por corriente continua. Una pequeña bobina de eje normal al de los solenoides está recorrida por la corriente a medir o revelar. La resonancia se obtiene actuando sobre la corriente continua. El aparato permite trabajar con frecuencias elevadas, hasta 1500 Hz.

22. Galvanómetro de Rump. — El aparato está representado en la fig. 16 b. Existen varios sistemas móviles intercambiables; cada uno de ellos consiste en una aguja imantada, de muy pequeñas dimensiones (las del imán más pequeño, de una aleación especial de hierro y platino, son 0,4 — 0,5 x 0,7 x 0,05 mm) suspendida de un hilo de capullo de seda en el campo director existente entre las piezas polares de un electroimán E excitado por corriente continua. Un segundo electroimán e, que produce un campo normal al campo director, está recorrido por

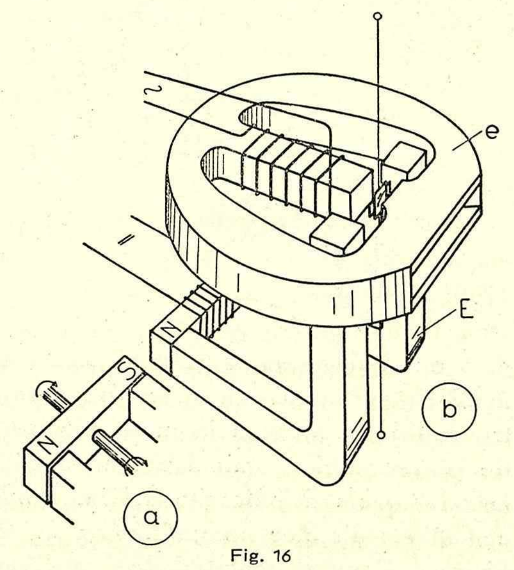


Fig. 16

la corriente alterna a medir o revelar. La observación se hace a través de un orificio previsto en el núcleo de e. Se obtiene un amortiguamiento enérgico por medio de una chapita de cobre próxima al imán. Esta construcción ha permitido aumentar las sensibilidades, que a 50 Hz llegan a 785 mm/m.μA y 7,4 mm/m.μV; $\alpha_o \cong 0{,}005$.

Se construye también un modelo análogo, pero con imán permanente (fig. 16 a). Se regula el campo director haciendo girar el imán frente a las piezas polares fijas. Las sensibilidades a 50 Hz son 72 mm/m.μA y 0,72 mm/m.μV; $h_o = 2$, $\alpha_o = 0{,}007$.

Los aparatos están protegidos por pantallas magnéticas de ferroníquel.

23. Galvanómetro de Agnew. — Un hilo de hierro de 3,3 cm de longitud, y de diámetro igual a 0,04 mm para 25 Hz y a 0,1 mm para 60 Hz, está fijo a un imán permanente *NS* (fig. 17a). Un nú-

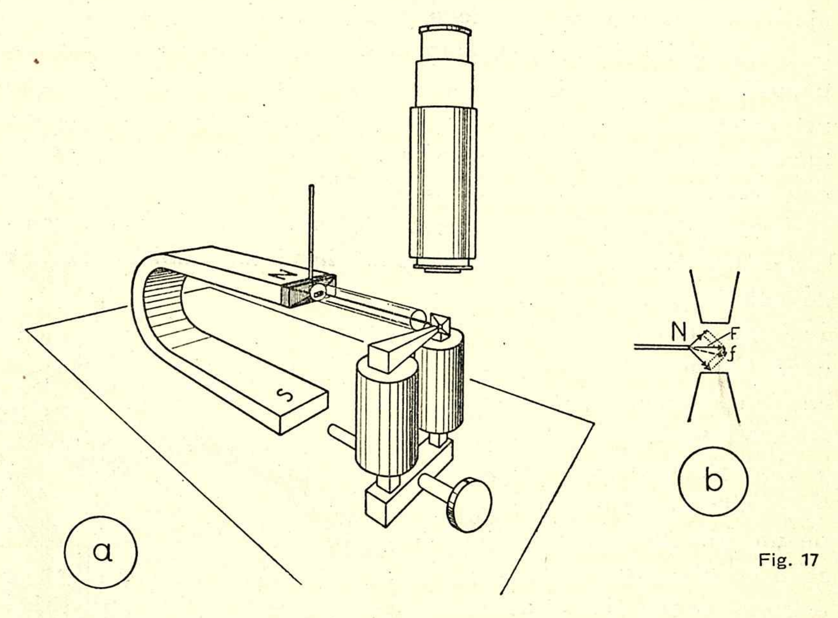


Fig. 17

cleo en U lleva dos enrollamientos recorridos por la corriente a medir; está terminado por piezas polares en forma de pirámides truncadas. La resonancia puede regularse en un intervalo de $\sim 5\,\%$ de la frecuencia nominal por un tornillo de hierro, que modifica la reluctancia del circuito del imán permanente y en consecuencia el par director magnético y la frecuencia ideal del hilo de hierro. Para un metal dado, y a igualdad de campo, esta fre-

cuencia es sensiblemente proporcional al diámetro e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud del hilo. En ausencia de la corriente a medir, la fuerza F que se ejerce sobre el polo norte del hilo (fig. 17 b) está dirigida según éste; cuando se envía la corriente, en primera aproximación todo pasa como si se agregara, normalmente a la precedente, la fuerza motora f. Este esquema simplificado es análogo al de un polo del aparato de *Rubens*, (parágrafo 17, fig. 13 b) pero la fuerza directora magnética varía más, durante el desplazamiento del hilo, que en el aparato de *Rubens*. La vibración del hilo se hace en un plano horizontal, y se observa con un microscopio. La sensibilidad depende de la distancia del hilo a las piezas polares; el hilo está protegido por un tubo de vidrio. Con un aumento de 100 y con bobinas de 1 Ω se puede revelar una d.d.p. de 1 μ V; con bobinas de 270 Ω, una corriente de 0,05 μA; $\alpha_0 \cong 0{,}006$.

24. **Galvanómetro de Duddell.** — *Blondel* fué el primero en construir un galvanómetro de frecuencia propia elevada, que consiste en dos hilos paralelos tensos, que empleó como oscilógrafo. Como vimos en el parágrafo 2, basta disminuir el amortiguamiento de este aparato para poderlo emplear como galvanómetro de resonancia. *Duddell* lo construyó en una forma que permite emplearlo cómodamente entre las frecuencias de 70 y 700 Hz. La corriente a medir recorre un simple bucle de hilo de bronce, que pasa por una pequeña polea, mantenida por un resorte r (fig. 18). Dos puentes a y a' pueden desplazarse permaneciendo equidistantes del espejo soportado por los hilos; se hace así variar la longitud de los hilos y por consiguiente el par director. La regulación fina se hace obrando sobre la tensión de los hilos por medio del resorte r. El inconveniente del aparato consiste en que el espejo, que debe ser sumamente pequeño, da un spot poco luminoso. La sensibilidad del aparato es bastante elevada (60 mm/m.μA a 100 Hz).

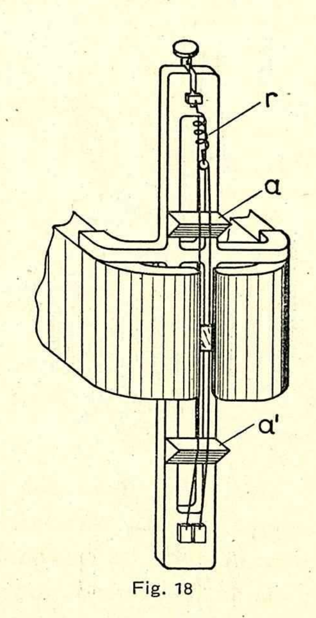
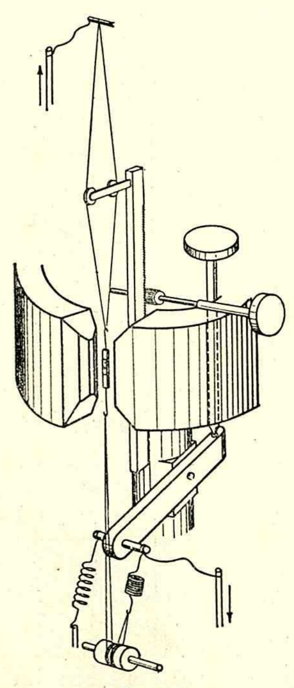


Fig. 18

Este galvanómetro pertenece en realidad a la clase de aparatos con un número teóricamente infinito de frecuencias ideales propias, y debe ser considerado no como un cuadro formado por dos hilos y sometido a un par, sino como dos cuerdas unidas entre sí por el espejo y sometidas a fuerzas repartidas. Volveremos sobre este tema en otro lugar; nos limitaremos a indicar aquí que si la masa del espejo es suficiente, el aparato tiene pequeña sensibilidad a las armónicas de la frecuencia fundamental, siendo pues selectivo (*Butterworth*).

Schering y *Schmidt* construyeron un galvanómetro análogo pero con un bucle de un metro de longitud para poder trabajar a entre 25 y 125 Hz. Se tenía $S\mu A_{max}^{-1} = 10$ mm/m.μA a 25 Hz, $\alpha_o = 0{,}007$ $h_o = 1{,}4$.

25. Galvanómetro de Campbell y similares. —Es un galvanómetro de cuadro con cuadro de muy pequeñas dimensiones. Primitivamente la suspensión superior consitía en un hilo de seda y la inferior era bifilar y conducía la corriente; más tarde *Campbell* hizo las dos suspensiones metálicas, primero bifilares, y monofilares en los modelos más recientes. Se hace una regulación aproximada obrando sobre la longitud de la suspensión superior por medio de una cremallera y un puente móvil, y una regulación fina obrando sobre un resorte que tiende más o menos la suspensión (fig. 19). El cuadro está colocado en el entrehierro de un poderoso imán permanente. De acuerdo con lo indicado en el parágrafo 7, la sensibilidad disminuye rápidamente cuando aumenta la frecuencia; por eso el aparato posee cierto número de cuadros fácilmente intercambiables, que permiten cubrir el intervalo 10—1200 Hz en buenas condiciones de sensibilidad. Se tiene $S\mu A_{max}^{-1} = 60$ mm/m.μA a 50 Hz; $\alpha_o \cong 0{,}002$. El valor de h_o es elevado


Fig. 19

Zöllich construyó un galvanómetro muy sensible basado en el mismo principio, con $h_o = 2$, $S\mu A_{max}^{-1} = 250$ mm/m.μA a 25 Hz, $\alpha_o = 0{,}015$.

Si el momento de inercia del cuadro es muy pequeño y el de los hilos de sus-

pensión no es despreciable, se pueden observar resonancias a frecuencias armónicas. El fenómeno es análogo al mencionado en el aparato de Duddell.

Gall construyó un aparato en el que se regulan simultáneamente la longitud y la tensión de los hilos, provisto de una escala circular donde se lee directamente la frecuencia de resonancia $w_0 = \sqrt{\frac{C}{K}}$ correspondiente a una regulación dada, que puede variar por ejemplo entre 15 y 70 Hz; tres sistemas móviles permiten cubrir la zona entre 3 y 300 Hz. La regulación es así simple y rápida; $S_{\mu A\,max}^{-1} = 40$ mm/m.μA a 50 Hz.

Rothwell construyó un galvanómetro con 12 cuadros, destinado a investigaciones acústicas. Se previeron los cuadros para resonar a frecuencias crecientes dentro del intervalo 128 y 197 Hz en progresión geométrica de razón 104/100; están colocados uno al lado del otro en el entrehierro de un electroimán. Los espejos están pegados normalmente a los planos de los cuadros, y las imágenes se forman una encima de otra. Los cuadros están conectados en serie.

26. Galvanómetro de Vuylsteke. — El sistema móvil comprende dos cuadros, a 90° entre sí (fig. 20); el cuadro inferior, principal, está colocado entre los polos de un electroimán o de un imán permanente (el autor recomienda el empleo de un electroimán); el cuadro superior, auxiliar, está colocado entre los polos de un electroimán y su posición en reposo es normal a las líneas de fuerza. El cuadro principal está recorrido por la corriente a revelar; el cuadro auxiliar está recorrido por una corriente i cuya intensidad se puede regular. En esas condiciones el par director es el elástico aumentado en el par $C_1 = a\,i$ que obra sobre el cuadro auxiliar. Si el cuadro auxiliar estuviese conectado en los bornes de una resistencia colocada en serie con la bobina de su propio electroimán se tendría $C_1 = a'\,i^2$, lo que puede ser interesante en ciertos casos. Tanto el amortiguamiento por el aire e histéresis elástica como el electromagnético suplementario debido a la presencia del cuadro auxiliar, son pequeños. El aparato tendría la

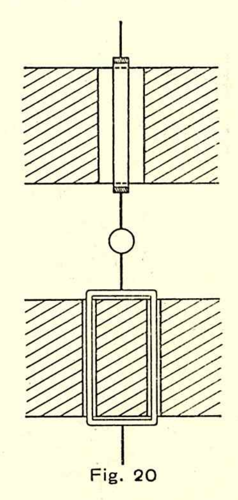


Fig. 20

ventaja de la regulación fácil, entre grandes límites, del par director, que se hace a distancia; el autor no indica la sensibilidad.

27. Galvanómetros de más de un grado de libertad. Resonancia anormal. — En todo lo que precede se supuso que el galvanómetro poseía un solo grado de libertad (en general rotación alrededor del eje de simetría del aparato), y que, salvo observación contraria, los coeficientes K, A_0, C, g, de la ecuación de movimiento, eran constantes. Pero el aparato no es completamente rígido en sentido lateral, y una asimetría de construcción un poco importante puede traducirse por un movimiento adicional de translación. *Jones* mostró que en ese caso la curva de resonancia presenta dos máximos separados por un mínimo, y es análoga a las curvas de resonancia que se encuentran en el estudio de dos circuitos eléctricos oscilantes, fuertemente acoplados. Tal curva ha sido observada por cierto número de autores, por ejemplo *Rosa* y *Grover*, *Zöllich*, etc

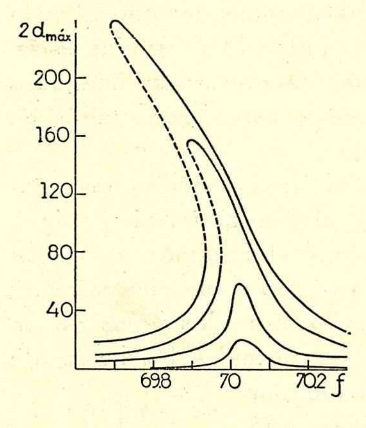


Fig. 21

Cuando los coeficientes de la ecuación no pueden ser considerados constantes, la curva de resonancia resulta más o menos deformada: así *Appleton* señala, en un galvanómetro de resonancia tipo *Drysdale*, la existencia de una zona donde se pueden obtener tres valores de la desviación para una misma intensidad, dos estables y uno inestable (fig. 21) y atribuye el fenómeno a que el par director no es proporcional al ángulo de desviación y a que la imantación de la aguja es función de la posición de ésta en el campo.

Nota anexa: Teléfono.

No podemos terminar este capítulo sin decir algunas palabras sobre el teléfono, tan utilizado como aparato de cero a frecuencias acústicas: en efecto, el estudio simplificado de su funcionamiento es análogo al estudio del galvanómetro de resonancia.

28. Estudio simplificado del funcionamiento. — Nos basta considerar el teléfono del tipo electromagnético. Es sabido que el modelo común (*Bell*) consiste en una membrana de hierro atraída por las piezas polares de un imán permanente (fig. 22), o, más raramente, de un electroimán. Las piezas llevan dos bobinas recorridas por la corriente a revelar.

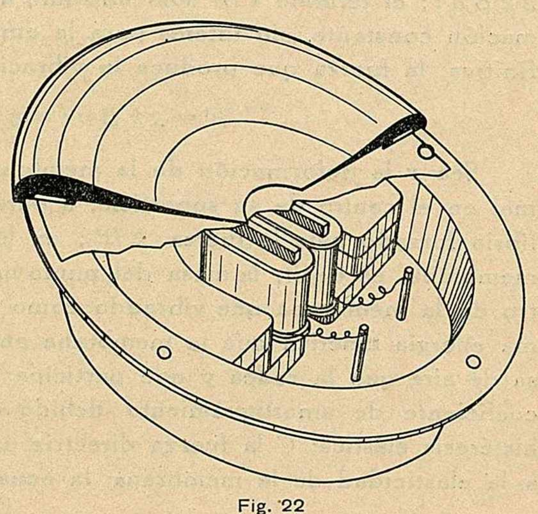


Fig. 22

En otros modelos, la atracción se ejerce sobre una paleta de hierro solidaria a una membrana que es plana (*Baldwin*) o cónica (*Brown*).

Si se admite que la permeabilidad de las partes ferromagnéticas del circuito magnético es constante, hipótesis que aquí es sensiblemente válida, la fuerza equivalente de atracción, que supone-

mos, para simplificar, concentrada y obrando en el centro de la membrana, será en cada instante proporcional al cuadrado de la inducción resultante B_r

$$F = k\, B_r^{\ 2} \qquad (81)$$

siendo

$$B_r = B + B' \qquad (82)$$

donde B es la inducción debida al imán permanente y B' el incremento de la misma debido a la corriente i que atraviesa las bobinas. Tanto B como B' dependen de la distancia de la membrana a las piezas polares, pero como la amplitud de las vibraciones es siempre pequeña se puede admitir, en primera aproximación, que

$$B = Cte$$

y que

$$B' = a\, i$$

donde a es una constante.

Resulta pues

$$F = k\,(B + a\, i)^2 = k\,(B^2 + 2\, B\, a\, i + a^2\, i^2) \qquad (83)$$

El término $k\, a^2\, i^2$ es generalmente despreciable frente a $2\, k\, B\, a\, i$; el término $k\, B^2$ sólo imprime a la membrana una deformación constante, sin interés para la emisión del sonido. En definitiva, la fuerza que produce la vibración es

$$F' = 2\, k\, B\, a\, i = g\, i \qquad (84)$$

Sea x la deformación de la membrana contada sobre la normal en el centro de su superficie, a partir de la posición de equilibrio forzado bajo la fuerza $k\, B^2$; m la masa equivalente de la membrana, es decir, la masa del punto material situado en el centro de la membrana que vibrando como ese centro posee la misma energía cinética que la membrana entera, comprendida la masa de aire que la rodea y que participa en el movimiento; A_o el coeficiente de amortiguamiento debido a los frotamientos y a la histéresis elástica; C la fuerza directriz unitaria equivalente debida a la elasticidad de la membrana; la ecuación de movimiento es

$$m\, \frac{d^2\, x}{dt^2} + A_o\, \frac{dx}{dt} + Cx = F' = g\, i \qquad (85)$$

Supongamos que el teléfono esté conectado en serie con una impedancia y un generador de f.e.m. $e = E_m\, sen\, w\, t$; sea $\mathbf{Z} = R + jLw$

la impedancia total de este circuito elemental cuando la membrana del teléfono está en reposo. La vibración de la membrana induce una f.e.m. $-g\frac{dx}{dt}$, de manera que se tiene

$$e-g\frac{dx}{dt}=Ri+L\frac{di}{dt} \qquad (86)$$

Las ecuaciones (85) y (86) son idénticas a las (22) y (23) que definen el funcionamiento del galvanómetro de resonancia bajo tensión de amplitud constante (parágrafo 3) y las conclusiones relativas al galvanómetro valen para el teléfono, especialmente

$$x_m=\frac{g\ E_m}{Z\sqrt{\left[C-\left(m-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2\right]^2+\left(A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right)^2w^2}}=$$

$$=\frac{g\ I'_m}{\sqrt{\left[C-\left(m-\frac{g^2L}{Z^2}\right)w^2\right]^2+\left(A_o+\frac{g^2R}{Z^2}\right)^2w^2}} \qquad (87)$$

idéntica a (28). Por el hecho de su vibración, la membrana introduce en el circuito una impedancia de movimiento cuyo lugar es la circunferencia de la fig. 7; sus componentes están dadas por las fórmulas (55) y (56) donde se reemplaza K por m; I' es la corriente ficticia que pasaría por el teléfono si no existiera la impedancia de movimiento.

Si la impedancia del circuito es lo suficientemente grande como para poder despreciar frente a E la f.e.m. inducida por la vibración de la membrana, se escribe simplemente

$$x_m=\frac{g\ I_m}{\sqrt{(C-m\,w^2)^2+A_o{}^2w^2}} \qquad (88)$$

con

$$I'_m=\frac{E_m}{Z}=I_m$$

siendo (88) idéntica a (3).

Pero hay una diferencia esencial entre el teléfono y el galvanómetro de resonancia; el primero sólo puede servir como aparato de cero, porque no se mide la deformación de la membrana correspondiente a una d.d p. dada; sólo se aprecia la menor d.d.p. que produce un sonido perceptible: interviene pues la influencia

del operador. La curva de resonancia del teléfono es la de la menor corriente o tensión que produce un sonido perceptible, en función de la frecuencia.

Generalmente el teléfono está desprovisto de órganos de regulación, aunque en ciertos casos se puede hacer variar la distancia de la membrana a las piezas polares, o también ejercer una presión en un punto excéntrico de la membrana. *Abraham* construyó un modelo en el que la membrana estaba soportada por dos hilos paralelos, tensos, de tensión regulable.

Dimensionando convenientemente el aparato, se pueden obtener frecuencias de resonancia relativamente bajas, por ejemplo del orden de 500 Hz.

Hay que observar que en realidad la curva de resonancia del teléfono suele presentar varios máximos, de agudeza desigual, no explicados por la teoría precedente, a causa de las aproximaciones hechas.

La analogía del teléfono con el galvanómetro de resonancia puede continuarse: este último puede servir como oscilógrafo siempre que su frecuencia propia sea suficientemente elevada y que su amortiguamiento sea conveniente, en particular, tal que la sensibilidad permanezca aproximadamente constante en un amplio intervalo de frecuencias; por el contrario, como galvanómetro debe ser selectivo. Del mismo modo, el teléfono, como aparato receptor reproductor del sonido debe ser fiel a todas las frecuencias, y como aparato de cero debe ser selectivo, sensible a la frecuencia de trabajo e insensible a las otras. Si esta condición no se cumple, por no disponer de teléfono conveniente o de fuente de frecuencia regulable, y si se trabaja con frecuencias muy inferiores a la de resonancia, se corre el peligro de que una armónica falsee la medida. Por el contrario, si se puede hacer que el teléfono trabaje a la frecuencia correspondiente al máximo de sensibilidad, el aparato es muy sensible, permitiendo revelar corrientes menores de 10^{-8} A.

INDICE

LIT. E IMP. DEL COMERCIO
25 DE MAYO 321